Il “mestiere dell'insegnante”

da una mia relazione all'Università di Brescia per il diploma di specializzazione in didattica algebrica, analitica e stechiometrica all’Università Cattolica di Brescia e appunti di Chimica alll' ITIS e Liceo Torriani di Cremona.
Tesi d'esame, arricchita con immagini, al corso tenuto dal Prof. Pierluigi Pizzamiglio. docente presso Universityà Cattolica di Milano. Università degli studi di Parma e di Bologna. Curatore ella Biblioteca di Storia delle Scienze "Carlo Viganò".

giorgio maggi

Introduzione (i concetti saranno compressi in sintesi in cui cercherò di puntualizzare aspetti per me interessanti legati alla didattica)

Si vuole descrivere le posizioni antitetiche assunte da taluni sugli Elementi di Euclide (IV e III sec. a.C.) :

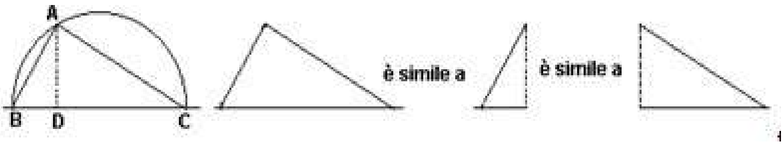
1. Euclide rappresenta il risorgimento della matematica
2. Euclide è criticato per contenuti, struttura logica, didattica

ANTEFATTO E RETROSCENA
Proclo (V d.C.) : riferisce di antichi manuali e in particolare degli Elementi
Pappo (III.IV d.C.) : evidenzia strutture di tipo analitico
Evoluzione teorica : la filosofia e la scienza ellenistica evolsero nella elaborazione

- **del metodo analitico**(che consiste nel passare da proposizioni più complesse ad altre più semplici sino alle elementari (dalle conseguenze ai principi) e successivamente al
- **metodo sintetico** (da proposizioni semplici costruisce per deduzione un sistema di proposizioni detto sistema dgli elementi

(Esempio di evoluzione teorica secondo Zeuthen è la dimostrazione del teorema di Pitagora che parte da

1. teoria delle equivalenze = in un triangolo rettangolo , l’altezza relativa all’ipotenusa



divide il triangolo in due triangoli simili tra loro e simili al triangolo di partenza
Fig... similitudini

2. teoria delle proporzioni = AB : BD = BC : AB e anche AC : DC = BC : AC

3. dimostro Pitagora da $AB^2 + AC^2 = BC \, . \, BD + DC \, . \, BC = BC \, . \, (BD + DC) = BC^2$

STRUTTURA COMPOSITA DEGLI ELEMENTI
Il manuale euclideo raccoglie e integra acquisizioni geometriche precedenti in 13 libri
<u>**Criteri di esposizione**</u> : sistematico e deduttivo
<u>**Obiettivi**</u> : 1) rigore delle conoscenze ; 2) esposizione elegante
<u>**Contenuti**</u> : Euclide distingue

1. 150 leggi ripartendole in tre specie

- maggior parte sono termini primitivi o definiti
  (esempio *punto=ciò che non ha parti ; parallele = rette che non si incontrano mai se prolungate all’infinito*)
- 8 nozioni comuni

- enti fondamentali :Punto, retta e piano, sono enti fondamentali della geometria euclidea e la cui nozione intuitiva corrisponde all'idea di una posizione sulla retta, nel piano o nello spazio di figure non scomponibili in parti)

Enti geometrici fondamentali

- Il punto è il primo degli enti geometrici fondamentali: il punto è privo di dimensioni, ed Euclide lo identificò come «ciò che non ha parti». forma tutte le figure geometriche "superiori", con un insiemi di punti.
- una retta è un insieme infinito e continuo di punti che hanno sempre la stessa direzione. Essa non ha né spessore né larghezza. È caratterizzata dalla lunghezza.
- Il piano ha due dimensioni, la lunghezza e la larghezza.
- Lo spazio è il quarto ente fondamentale ed è dotato di tre dimensioni: lunghezza, larghezza e altezza

5 postulati

Definizione dei 5 postulati:

1-per un punto passano infinite rette
2-da due punti passa una retta che si può prolungare all'infinito
3-se una retta ha in comune due punti su un piano allora giace sul piano; si può descrivere un cerchio con qualunque centro ad ogni distanza;
4-per una retta passano infiniti punti; considerati tre punti A, B e C o una retta, che risultano essere allineati, attraverso questi è possibile individuare infiniti piani passanti, ovvero un fascio di piani passa per essi.
5-per tre punti distinti appartenenti alla stessa retta passa uno e un solo piano, per una retta ed un punto fuori di essa passa un solo piano, per due rette incidenti passa un solo piano, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minore di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno a incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due angoli retti

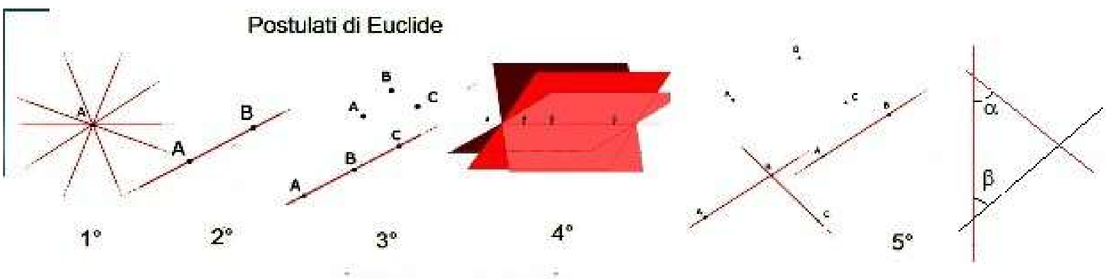


Fig... postulati di Euclide

500 proposizioni suddivise in un centinaio di problemi e 400 teoremi (compreso Pitagora n°47)

Ipotesi sulla elaborazione dei postulati: Euclide non fonda le sue tesi su prove pratiche (è impossibile immaginare una retta all'infinito…)
Critiche ottocentesche agli Elementi: l'opera presenta insufficienze logiche nella descrizione lessicale che vengono attenuate dai disegni ;
Procedura argomentativa (argomentazione dimostrativa) : che

nelle proposizioni/ problemi segue i passaggi : enunciazione→ delucidazione della figura → costruzione → dimostrazione → conclusione c.d.f
nelle proposizioni/ teoremi la conclusione è c.d.d
nella aggregazione di proposizioni : il quadrato logico può definirsi
proposizione diretta = ipotesi → tesi
proposizione inversa = tesi → ipotesi
proposizione contraria =negazione ipotesi → negazione tesi
proporzione contronominale = negazione tesi→ negazione ipotesi
Conclusioni sul lavoro di Euclide : forza dimostrativa delle argomentazioni che nasce dalla tradizione Platonica, Aristotelica e di Eudosso di Cnido; Reciprocità tra scienza e comunicazione scientifica = didattica della matematica

Struttura dei 13 libri : 10 dedicati alla geometria piana e 3 alla geometria solida:
Gli Elementi abbracciano quasi totalmente il campo delle Matematiche elementari greche. Sono divisi in 13 libri di cui i primi I-IV e il VI sono dedicati alla geometria piana, il libro V alla teoria delle proporzioni, i libri VII, VIII e IX alla aritmetica (caso di commensurabilità, Caso di incommensurabilità), il libro X alla teoria degli irrazionali, i libri XI, XII e XIII alla geometria solida. ; Aspetto del finito, Aspetto dell'infinito, I cinque poliedri = figure cosmiche o platoniche

MOMENTI DELLA STORIA
In diversi momenti storici si tenta di affrontare la geometria con fini diversi:
IV –III sec: Euclide scrive gli Elementi :

- re Tolomeo ne ricerca la facilità di comprensione,
- Archimede la sua didattica (III aC),
- Erone di Alessandria la sua applicabilità ((II-I sec aC)
- Teone di Alessandria ancora la sua didattica (IV sec dC)
- Severino Boezio ne prepara la pubblicazione integrale (500 dC)
- Gli arabi lo trasformano in manuale scolastico
- Nel rinascimento il testo greco sarà stampato a Basilea nel 1533 da Grynaeus e nel 1543 Tartaglia ne pubblicò una edizione in lingua italiana moderna.
- Nel XVI e XVII sec Galileo e Pierre de la Ramee criticano l'opera ritenendola carente e ridondante
- Nel rinascimento si adattano gli Elementi a attività pratiche (pittura, architettura agrimensura)e didattiche.
- A fine XVII sec Vincenzo Viviani stampa a Firenze la traduzione italiana degli Elementi che verrà ristampata in periodi successivi. E contemporaneamente nel 1703 nasce la grande edizione di Oxford
- Nel 1733 Gerolamo Saccheri tenta di dimostrare la non indipendenza del V postulato
- Nel 1751 Clairaut critica l'impostazione noiosa degli Elementi con troppe definizioni, postulati e assiomi da cui partire (critica il metodo deduttivo Euclideo…) e consiglia di iniziare lo studio della geometria da fatti concreti per poi giungere alla regola o teorema (metodo induttivo): il suo lavoro inizia da figure geometriche per passare al disegno , all'equivalenza, all'eguaglianza e alla similitudine, composizione di poligoni, geometria solida.
- Nell'ottocento si alternano fautori della fedeltà critica ad Euclide e della necessità di una impostazione diversa
- Nel 1867 nei programmi ministeriali la matematica è definita come conoscenza per i

bisogni della vita e mezzo di cultura intellettuale e la geometria sempre riferita agli Elementi di Euclide evitando commistioni con l'algebra
- Il testo Euclideo viene man mano scomparendo dalla scuola italiana ed ha inizio la moderna manualistica dell'insegnamento della geometria

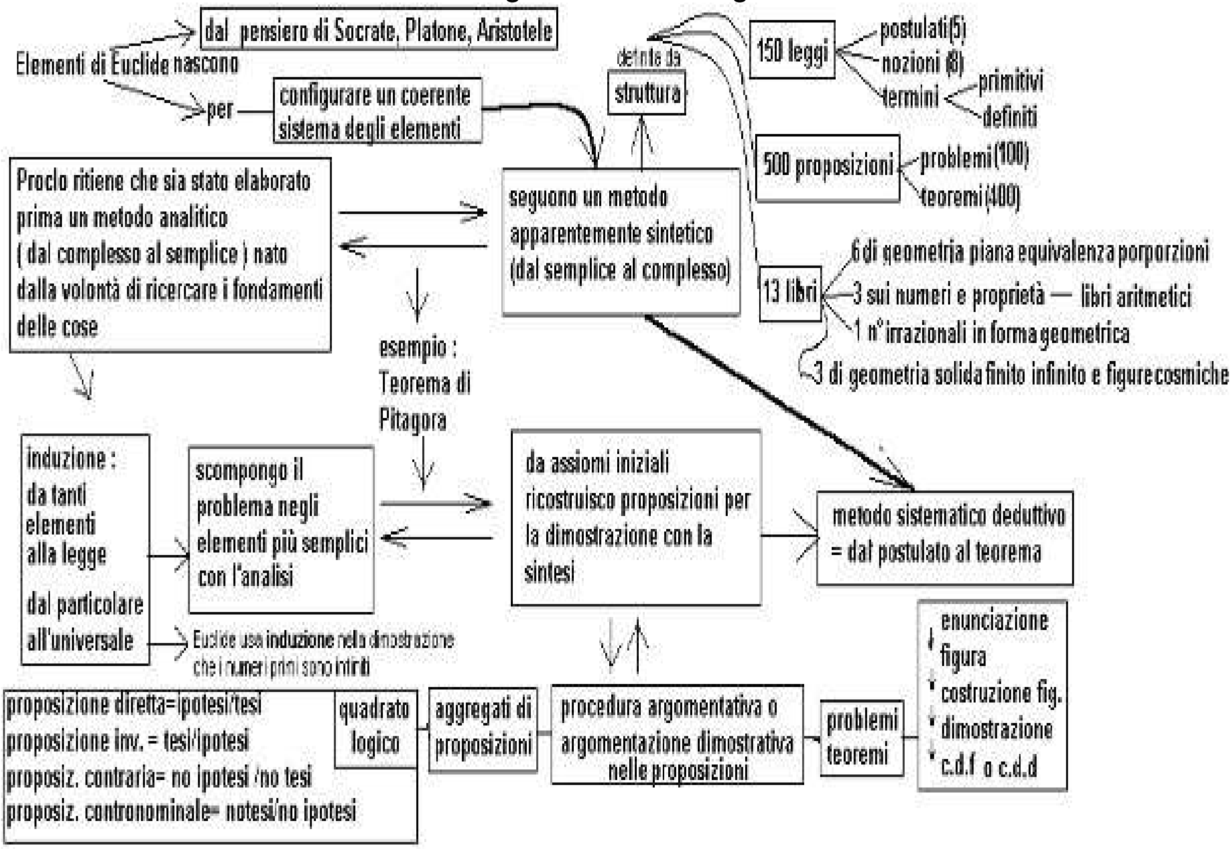


Fig. mappa concettuale Euclide

…

Tento un parallelo con tassonomia di Bloom : evoluzione della conoscenza in didattica

CONOSCERE : elementi in quanto classi, concetti, principi esistono storicamente nella conoscenza in forma semplice

COMPRENDERE : per le diverse civiltà gli elementi hanno un significato di verità diverso che coincide con le necessità di sapere empirico (egizi e fenici) e teorico (greci Eudemo di Rodi aristotelico)

APPLICARE : nell"elenco dei geometri (IVsec a.C.) Eudemo parla di necessità pratica per la matematica egiziana e di esigenza astratta ed intellettuale per i greci nella figura del leggendario Talete
Gemino da Rodi distingue la matematica delle cose intelligibili (teorica) e la matematica delle cose sensibili (pratica)

ANALIZZARE : lo studio sistematico analitico degli elementi (natura delle cose) -> ricerca del "principio o archè (Scuola di Mileto; Scuola Pitagorica)

SINTETIZZARE : Euclide sintetizza un percorso da assiomi a teoremi con due scopi (secondo Proclo) : 1) teorico sulla geometria dell'Universo ; 2) didattico

VALUTARE : Il significato degli Elementi viene espresso storicamente da Eudemo ; viene elaborato teoricamente da Euclide e viene proposto da Proclo in senso epistemologico

Fig. Tassonomia di Bloom

(seguono esempi riletti dalla letteratura)

Come nacque e come evolse la geometria?

Si ipotizza che la geometria nasca per risolvere concreti problemi di misurazione del terreno a scopi agrimensori in Egitto: una geometria empirica legata a regole pratiche. La Grecia vide il sorgere della geometria . come scienza razionale, legata alla logica. Euclide, raccoglie tutto il sapere da Pitagora,a Talete,a Eudosso di Cnido, scrivendo i suoi Elementi, in 13 libri, seguendo un metodo rigorosamente deduttivo che fa discendere ogni proposizione da precedenti proposizioni a partire assiomi riguardanti alcuni oggetti primitivi come punto, retta, piano). Importanti saranno anche gli studi di Apollonio sulle coniche e quelli di Archimede sul cerchio e sulla sfera.
Nel portico della famosa Accademia di Atene, dove Platone insegnava, l'avvertimento: **“Non entri chi non conosca la Geometria”**. La geo-metria nacque come studio della “misura della terra” e si rafforzò con gli Elementi di Euclide. Il rapporto tra geometria e mondo fisico caratterizzerà un momento fondamentale come quello dell’apprendimento.
In questa ottica Giuseppe Peano (1894) afferma che ipotesi o postulati esprimano il risultato delle osservazioni più semplici ed elementari delle figure fisiche in ciò sta il fondamento della fiducia nella verità. Di fatto il legame tra la geometria e la realtà andrà discutendosi con (Poincaré, 1902, p. 90-92) e David Hilbert nelle Grundlagen der Geometrie in cui la geometria diventa così una scienza sempre più affrancata da ogni richiamo al reale: il principio essenziale di validità diviene la corretta forma e la coerenza del ragionamento.:principi coerenti e non antitetici. Con la scoperta delle geometrie “non-Euclidee” la Crisi dei Fondamenti ebbe come conseguenza che “ **la matematica è un’opinione”**.

Dopo circa due millenni il filosofo, matematico e logico Leibniz notò che la prima proposizione del I libro degli Elementi si poteva dedurre dai postulati (La prima proposizione di Euclide introduce il concetto di rette parallele:. Se una retta, cadendo su due rette, fa gli angoli alterni interni uguali fra loro, le due rette saranno parallele fra loro), e successivamente il filosofo Schopenauer osservò che neanche la quarta proposizione, quello che noi chiamiamo il primo criterio di congruenza dei triangoli (Se due triangoli hanno rispettivamente congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso, allora sono congruenti), si può ottenere dagli assiomi.
Solo nel 1899 il grande matematico tedesco Hilbert dimostrò che il sistema di Euclide-Hilbert è completo con ventuno postulati!
Con la teoria dei gruppi di Galois, ha inizio l’algebra moderna, in cui ci si occupa di “operazioni” e “relazioni” fra gli elementi di un qualsiasi insieme astratto,; nel 1872 il matematico Klein all’università di Erlangen propose la geometria come lo studio delle proprietà che rimangono invariate quando si sottopone il piano (lo spazio) a un gruppo di trasformazioni.
Nel1830 due matematici, l’ungherese Bolyai e il russo Lobachevski, indipendentemente uno dall’altro, proposero un sistema assiomatico in cui ammettevano un’opinione diversa da quella di Euclide, cioè che: per un punto non appartenete a una retta si possano condurre infinite parallele alla retta. Nel 1854, il tedesco Riemann, espresse un’opinione diversa dalle due precedenti, e ammise che: per un punto non appartenete a una retta non si può condurre alcuna parallela alla retta. Einstein nel 1915 nella sua teoria della Relatività generale, formulata da, stabilisce che lo spazio geometrico ordinario non è di tipo euclideo ma riemanniano, perché i corpi distorcono lo spazio attorno a sé e il cammino più breve nelle loro vicinanze è curvo.

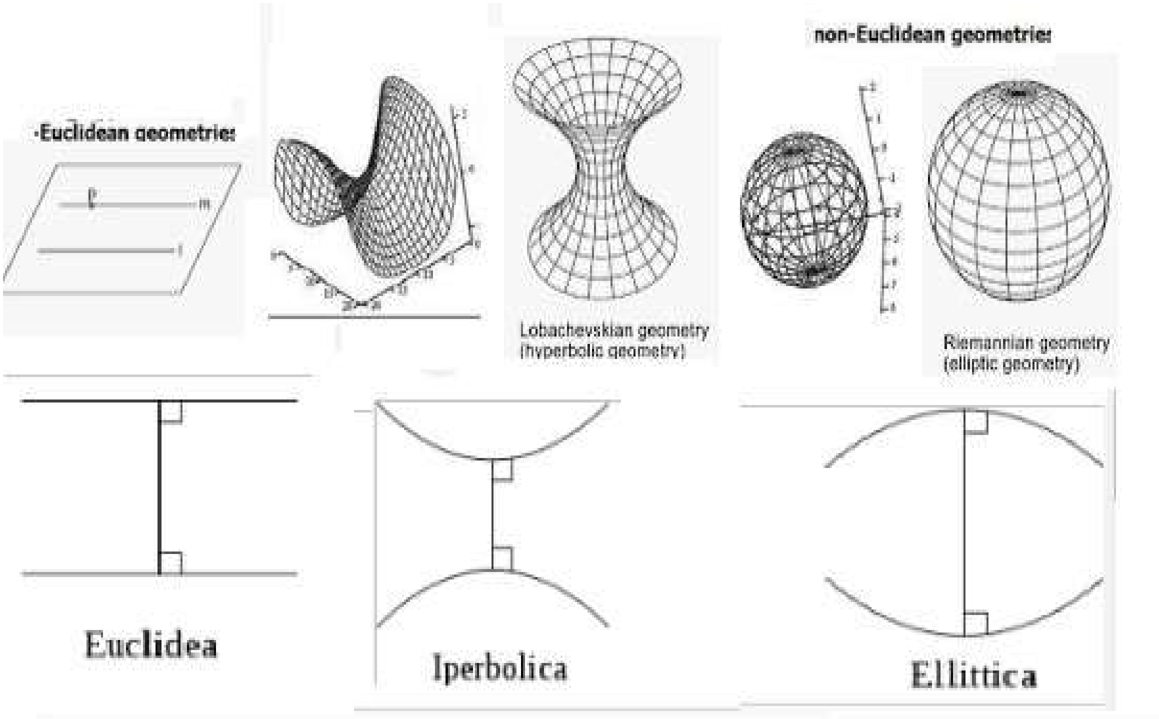


Fig Geometrie euclidee e non eucliee

…

Di ciò si sono avute ripetute e accurate verifiche sperimentali sino dal 1919. Un ulteriore significativo esempio tratto dalla fisica. L'evoluzione della fisica classica a partire dalle teorie di Newton per la meccanica e di Maxwell per l'elettromagnetismo studia l'inspiegabile emissione di energia del cosiddetto corpo nero. Che sarà indagata nel 1900 dal   tedesco Plank che introdusse la teoria dei quanti alla ricerca di ipotesi per giustificare teorie nel mondo atomico e subatomico che la fisica classica non era in grado di fornire . Nacquero le teorie della meccanica quantistica di Schrödinger e di Heisenberg che per merito del primo si dimostrarono entrambe valide.

Gli assiomi euclidei sono proprietà dello spazio che ci circonda, nate dall'esperienza, che **accettiamo per vere, non che sono vere**. Il salto di qualità verso l'astrazione parte da Hilbert che fa proprie le considerazioni di Cantor, Frege sugli insiemi e delle geometrie non euclidee di Gauss, Bolyai, Lobachevski e Riemann

Hilbert nel 1900 fece un salto di qualità verso l'astrazione,

Fig... Curve di Hilbert

(da https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_di_Hilbert, si legge subito all'inizio: …..Euristicamente ("non rigoroso"), uno spazio di Hilbert è un insieme con una struttura lineare (spazio vettoriale) su cui è definito un prodotto scalare (quindi è possibile parlare di distanze, angoli, ortogonalità) e tale che sia garantita la completezza, ovvero che qualunque successione di Cauchy ammetta come limite un elemento dello spazio stesso. Nelle applicazioni, i vettori elementi di uno spazio di Hilbert sono frequentemente successioni di numeri complessi o funzioni)

Hilbert ha modellato il pensiero matematico successivo con Gödel che scopre formule vere dell'aritmetica che non sono dimostrabili e dunque che la matematica è indecidibile: non è «senza macula d'errore e certissima per sé»

Il luogo comune **"se la matematica non è un'opinione", la "certezza" matematica, la "verità"** matematica traggono origine dal fatto che per più di duemila anni la matematica ha avuto come paradigma l'architettura euclidea degli Elementi, in cui le dimostrazioni sono perfette ma non contengono alcun riferimento alla fase euristica della ricerca delle proposizioni enunciate. Tutto ciò è caratteristico della matematica greca antica se si esclude Il Metodo di Archimede, in cui

intuizione, analogie e anche esperimenti fanno da guida per le postulazioni successive. (appunti tratti e riletti da Alfio Grasso)
Bernardino Grimaldi (1839-1897). Ministro delle Finanze nel 1879, sostenne in parlamento che la tassa sul macinato, nonostante colpisse i più poveri, non poteva essere abolita senza nuove entrate fiscali. La frase che pronunciò fu "*L'aritmetica non è un'opinione*", che poi entrò nell'uso comune. Genio della matematica e non dell'aritmetica dirà il rigoroso biografo.!

Lontano è il ricordo di uno dei corsi di matematica che frequentavo con assiduità. Il prof. Manara della Università di Milano scherzosamente mi apostrofò con la cruda verità... " un chimico non potrà mai capire la matematica! " io sorrisi per l'affermazione affabile e replicai " alla base della geometria ci sono assiomi e postulati, me ne potrebbe spiegare la differenza ? Avvertii un celato imbarazzo iniziale. Si rifece agli antichi Greci (Aristotele ed Euclide) definendoli verità palesi (assiomatico si usa ancora nel nostro linguaggio), da cui derivare risultati veri anche se non evidenti. Gli assiomi si riferivano all'uguaglianza, i postulati a concetti basilari comel'intervallo, il cerchio, ecc.). Critico fu il postulato delle parallele (esiste una e sola parallela ad una retta data passante per un punto dato) non dimostrabile ma neanche troppo evidente.
Nella scienza e nella matematica possono definirsi verità sicuramente derivabili dalla esperienza, ma non dimostrabili. Dall'Ottocento gli assiomi sono definiti come ipotesi, necessari a costruire teorie che non avevano una verità assoluta, ma solo relativa a quei 'modelli' in cui gli assiomi erano definiti veri. Rilevanti furono le 'geometrie non euclidee' in cui si sostituivano assiomi con altri Ovviamente i teoremi derivati erano diversi da quelli classici (teorema sulla somma degli angoli interni, criteri di uguaglianza, teorema di Pitagora, etc.).
Nel secolo scorso gli assiomi sono diventati pure e semplici sistemi di proposizioni da cui derivare teorie. Un assioma in matematica è un enunciato che anche se non può essere dimostrato, è considerato vero. .
Un postulato (ciò che è richiesto per continuare una dimostrazione ...) si differenzia da un assioma in quanto è introdotto per dimostrare proposizioni che altrimenti non potrebbero essere dimostrate. Il postulato si distingue dall'«assioma», che è principio tanto evidente da non avere bisogno di dimostrazione o spiegazione, Mi chiesi se l'insegnamento della chimica dovesse basarsi su assiomi o postulati, sorrisi pensano ai modelli atomici e alle teorie atomiche di Leucippo e Democrito e come avrei spiegato la Chimica alla mia bimba con le verità degli assiomi o i modelli dei postulati. Rilessi una frase da un lavoro di
. Come sostengono D'Amore, Fandiño Pinilla,Marazzani e Sbaragli (2008, p. 117): «Occorre riflettere bene sul senso profondo della differenza che c'è tra scienze empiriche e matematica; va bene usare modelli concreti degli oggetti matematici, ovviamente, non se ne può fare a meno, ai primi livelli di scolarità; ma demandare a questi modelli la concettualizzazione è certamente il primo passo verso difficoltà nelle quali costringiamo gli allievi. Perché far loro credere che l'oggetto concreto sia il concetto?, che il modello empirico sia l'oggetto matematico? Perché non dirlo esplicitamente che c'è una differenza abissale? Perché non problematizzare la questione? In nome di una semplificazione e di una sicurezza che si vuol dare allo studente, in realtà, lo si obbliga a navigare a vista in un mare irto di scogli pronti a far arenare la nave della costruzione concettuale».
Il richiamo agli aspetti pratici delle scienze sperimentali, pur essendo *necessario* nei primi livelli scolastici, può portare in errore in ambito geometrico e lasciare in ombra il fatto che questa disciplina riguarda verità eterne e universali. Occorre una grande sensibilità didattica per favorire il necessario connubio tra realtà e matematica; l'uso di modelli concreti può fornire un supporto efficace alle intuizioni matematiche, ma incerti casi può addirittura trasformarsi in ostacolo per la costruzione del sapere (Maier, 1993, 1998) . Una discussione che affascina e divide cultori della matematica provenienti da impostazioni cultuali diverse.

Come evolve dal Rinascimento all'ottocento

IL Rinascimento italiano introdusse i primi concetti di proiettiva e descrittiva. È con Cartesio(XVII
Il postulato, dal latino postulatum («ciò che è richiesto»), è una proposizione che, senza essere stata preventivamente dimostrata come vera, viene assunta come se lo fosse al fine di giungere logicamente alla verità di una qualche asserzione.

sec.) che si sviluppa la geometria analitica. Nasce il metodo cartesiano delle coordinate, che sarà utilizzato in algebra e nel calcolo infinitesimale. Una storia di sperimentazioni che si protrae sino al 19° sec. con geometria differenziale di K.F. Gauss e B. Riemann., le coniche di G. Desargues e futura geometria proiettiva diJ.-V. Poncelet.
Appaiono i primi studi sulle geometrie non euclidee di J. Bolyai e N.I. Lobačevskij, a partire proprio dal 5° postulato di Euclide. Dunque da un sistema assiomatico-deduttivo si passa alla nuovo concetto di geometria come scienza ipotetico-deduttiva in cui i principi non saranno più imposti ma discussi attraverso l'esperienza con il mondo circostante. Nasce la ‘critica al fondamento’, che immagina concetti diversi di geometria spaziale. Nasce nel 1872 il programma di Erlangen che presenta geometrie come studio delle proprietà degli enti geometrici dunque la geometria euclidea studia le proprietà invarianti rispetto al gruppo dei movimenti, la geometria . proiettiva quelle invarianti rispetto al gruppo delle proiettività che sarà organizzata da Poncelet così come appariranno la geometria descrittiva di G. Monge; la geometria differenziale di Gauss e Riemann, che ha dato poi origine al calcolo differenziale assoluto e al calcolo tensoriale; la geometria algebrica con G. Veronese e L. Cremona.

La Geometria metrica

Geometria elementare euclidea del piano e dello spazio. Gran parte della g. elementare si occupa delle proprietà delle figure invarianti rispetto al gruppo dei movimenti. Per es., appartiene alla g. euclidea la proprietà che «le diagonali di un quadrato sono perpendicolari», perché ruotando il quadrato si ottiene ancora un quadrato con le diagonali tra loro perpendicolari.
Mentre la esposizione della geometria negli Elementi di Euclide è di tipo **assiomatico-deduttivo:** che parte dagli enti primitivi – punto, retta e piano a cui seguono i 5 assiomi, la situazione della g. elementare secondo la critica moderna è invece di tipo **ipotetico-deduttivo**. Importante è la rielaborazione di D. Hilbert, nella quale i postulati che caratterizzano i punti, le rette e i piani sono suddivisi in 5 gruppi come segue: 1) **postulati di appartenenza** (per es., due punti distinti individuano una retta, che ne contiene infiniti); 2) **postulati di ordinamento** (per es., se A e C sono punti di una retta, esiste sopra essa un punto B situato tra A e C); 3) **postulati di congruenza** (per es., due triangoli, che hanno due lati e l’angolo compreso uguali, hanno rispettivamente uguali anche gli altri due angoli); 4) **postulato delle parallele** (per un punto non appartenente a una retta passa una e una sola retta parallela alla retta data: è il 5° postulato di Euclide); 5) **postulati d continuità** (per es., dati comunque due segmenti, esiste un multiplo dell’uno che sia maggiore dell’altro: è il postulato di Archimede).

Le Geometrie secondo KLEIN

Nel programma di Erlangen, Klein elabora un criterio per classificare le geometrie , esso consiste nell’assegnare ad un gruppo le proprietà delle figure che rimangono <u>invariate</u> rispetto a tutte le trasformazioni del gruppo. In definitiva, figure che siano trasformabili l’una nell’altra attraverso un movimento vengono dette tra loro **uguali** (o sovrapponibili), vale a dire la trasformabilità di una figura nell’altra mediante una trasformazione del gruppo (un movimento) coincide con la loro uguaglianza secondo la geometria elementare. Tale regola coincide con l’ordinaria nozione di uguaglianza nel caso della geometria elementare, ma si differenzia in altri tipi di geometria.: così in <u>geometria. proiettiva</u> il criterio è **l’equivalenza**, o **uguaglianza proiettiva** e il relativo gruppo fondamentale, il gruppo delle proiettività; nella <u>geometria affine</u> il ruolo analogo è sostenuto dal gruppo delle affinità; nella <u>geometria. algebrica</u> dal gruppo delle trasformazioni birazionali; nella <u>topologia</u> dal gruppo degli omeomorfismi.

Trasformazioni isometriche

fig. trasformazioni isometriche

…

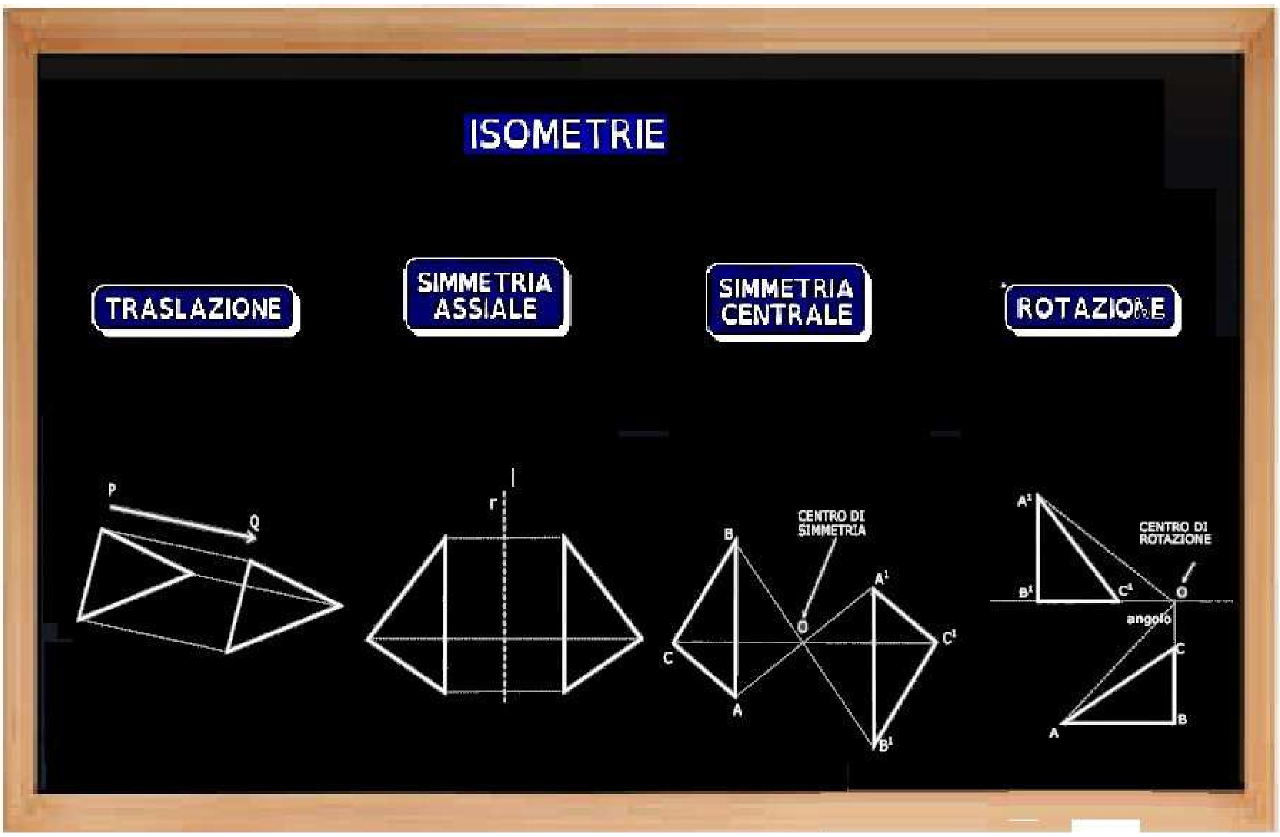


Fig. isometrie

Tipologie di geometria

<u>Geometria affine</u>: È l'insieme delle proprietà delle figure di un piano, o dello spazio, o di un iperspazio, che sono invarianti rispetto alle affinità, esempi sono : il parallelismo, il punto medio di un segmento, il baricentro geometrico, ecc.

G. algebrica Studio delle proprietà degli enti algebrici (curve, superfici, varietà), le quali sono invarianti rispetto alle trasformazioni birazionali (il relativo gruppo fondamentale, nella classificazione di Klein, è il gruppo delle trasformazioni birazionali).Trasformazione razionale tra due varietà algebriche X e Y è una classe di equivalenza di coppie (f_U,U), dove f_U è un morfismo di varietà definito sull'aperto U. Due coppie (fU,U) e (fV,V) si dicono equivalenti se fU ed fV coincidono sull'intersezione $U \cap V$.

Geometria del compasso: studio del problema e risoluzione con l'uso del solo compasso. È da notare la proprietà: ogni problema geometrico risolubile con la riga e con il compasso è risolubile anche con il solo compasso (G. Mohr, L. Mascheroni).

Geometria descrittiva: È quella parte della geometria. che ha per scopo la rappresentazione delle figure spaziali mediante figure di un certo piano detto quadro in modo che dall'immagine della figura si possa ricostruire la figura spaziale. I metodi più usati per realizzare tale rappresentazione sono: a) **metodo di Monge,** o della doppia proiezione ortogonale, che consiste nel proiettare ortogonalmente la figura spaziale sopra due piani mutuamente ortogonali, e nel ribaltare poi l'un piano sull'altro;

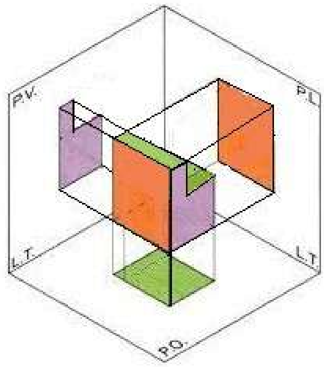


Fig. proiezione ortogonale

b) **metodo dell'assonometria**, che consiste nel proiettare ortogonalmente la figura spaziale sopra tre piani mutuamente ortogonali e nel proiettare poi tali tre proiezioni e la stessa figura spaziale sopra il quadro da un centro di proiezione improprio;

Fig. proiezione assonometrica

c) **c) metodo della proiezione centrale e metodo della prospettiva**, che consistono nel proiettare la figura spaziale sopra il piano rappresentativo da un centro di proiezione proprio;

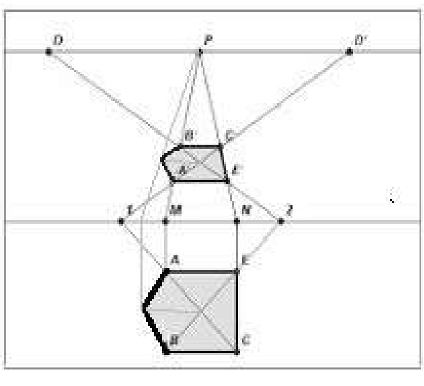


Fig. prospettiva geometrica

Lucrezio, nel suo De rerum natura rappresenta così la visione di un porticato lunghissimo in profondità “tetto e suolo si congiungono fino a terminare in un punto”. All'infinito gli oggetti lontani si confondono raggruppandosi in in un unico punto,”
Nell’Ottica di Euclide questi concetti iventano teoremi :

1. Tra i piani che giacciono sotto l’occhio quelli più lontani appaiono più in alto.
2. Tra i piani che stanno sopra l’occhio quelli più lontani appaiono più in basso.
3. Tra i piani che si estendono longitudinalmente, quelli a destra sembrano deviare verso sinistra, quelli a sinistra verso destra.
4. Segmenti paralleli visti da lontano appaiono non paralleli.

Date due rette parallele a e b e un punto A sulla retta a, possiamo trovare un corrispondente punto B sulla retta b prendendo la perpendicolare ad a per A. Il segmento AB così costruito si chiama segmento di distanza. Quando A si muove sulla retta a allontanandosi dall’occhio, il segmento AB allontanandosi dall’occhio insieme ad A, si vedrà via via più piccolo. Quindi il punto B si vedrà avvicinarsi sempre di più da A, sino a confondersi con esso.

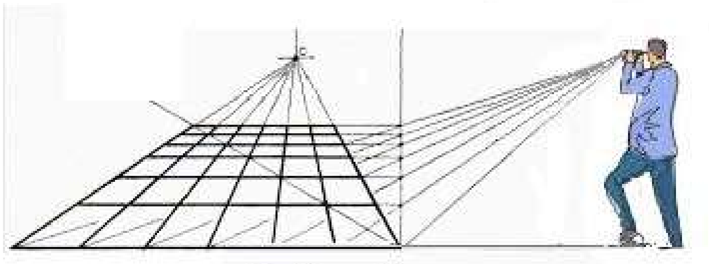


Fig. Prospettiva

Fig. prospettiva

d)metodo delle proiezioni quotate, che consiste nel proiettare ortogonalmente la figura spaziale sopra un piano e nell’associare a ogni punto-proiezione un numero, indicante la distanza dal piano del punto obiettivo;

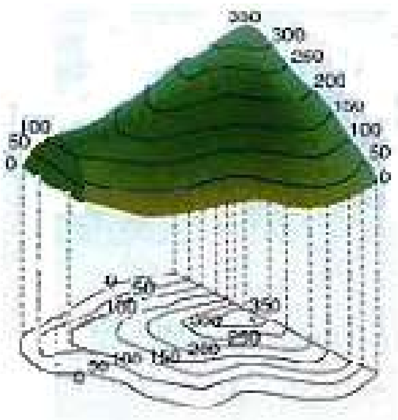


Fig. proiezioni quotate

e)ciclografia, in cui ogni punto è rappresentato da un cerchio orientato avente per centro la proiezione ortogonale del punto sopra il piano rappresentativo e per raggio la distanza del punto dal piano. Poiché sostanzialmente il mezzo con il quale si realizzano i metodi della g. descrittiva è quello di proiettare la figura in uno o più modi, essi si chiamano anche **metodi di proiezione**

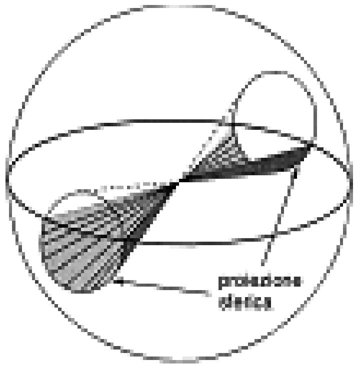


Fig … ciclografia

Attraverso la **geometria descrittiva** dunque si potranno risolvere problemi spaziali mediante costruzioni piane. Esempi in topografia, nel disegno artistico con l'applicazione della teoria delle ombre e del chiaroscuro, nella fotogrammetria, la stereotomia o taglio delle pietre.

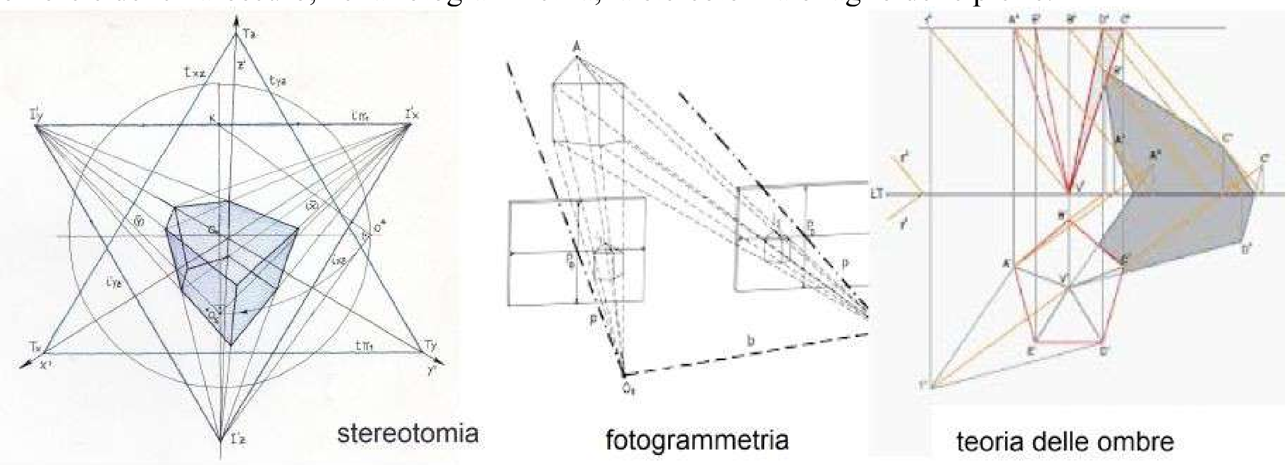


Fig … geometria descrittiva

La geometria differenziale è la teoria matematica che permette di descrivere la geometria di uno spazio curvo Eratostene per primo la usò per per calcolare il raggio di curvatura terrestre. Molte le applicazioni alla tangente alla curva, il piano osculatore a una curva sghemba, il piano tangente a una superficie , la normale a una curva piana, il triedro fondamentale, la curvatura e la torsione di una curva sghemba, la curvatura gaussiana e media di una superficie ecc.

Le origini storiche della geometria differenziale risalgono alle origini del calcolo differenziale, vedi ad esempio es., il teorema di Eulero sulla curvatura delle superfici), pe arrivare a Gauss e Riemann. Lo studio della Geometria Differenziale, è fondamentale per comprendere nel dettaglio la teoria della Relatività Generale che Einstein, formulò tra il 1905 e 1916 .

Eulero (Leonhard Euler), rivela anche un profondo interesse per la musica. Eulero definisce e il "gradus suavitatis" degli intervalli musicali e studia la "Tonnetz", un reticolato per descrivere in astratto i rapporti fra note e accordi. Descrive anche uno ambito geometrico legato alle note, lo "spazio di Eulero", dove l'asse x indica gli intervalli di quinta, l'asse y le terze maggiori e l'asse z le ottave.

Allo studio della matematica deriva la sua sua dissertazione che si intitola "De Sono"; uno dei suoi libri "*Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae"*.

Notevole sviluppo ha avuto la geometria **differenziale stocastica** che, sorta inizialmente in tre contesti differenti ma correlati, ha assunto un ruolo autonomo nella matematica e studia equazioni stocastiche

Geometria dei frattali: Si interessa allo studio di particolari configurazioni geometriche derivanti dall'uso della grafica al computer, ma rispondenti a precise costruzioni matematiche.

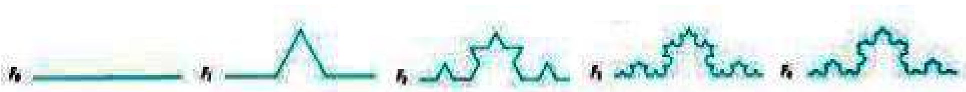


Fig. frattali

Geometria intrinseca è la geometria che si può costruire sopra un ente pensato a sé stante . Parlando in generale e considerando un ente geometrico qualsiasi, se ne dice *intrinseca* ogni proprietà, che gli competa in sé stesso, indipendentemente dal riferimento e dai procedimenti che si adottano per rappresentarlo e studiarlo.
Dato per scontato che aritmetica e matematica si fondano sul numero, la geometria appartiene a realtà diverse quando sia studiata nello spazio attraverso la geodetica o misura della terra. Essa ha la forma di un ellissoide non uniforme e ad essa non possono essere applicate formule di matematica per la sfera o formule i geometria euclidea se fosse piatta. Nascono allo scopo tecniche di misurazione e rilievi fatti con triangolazioni

Geometria non euclidea

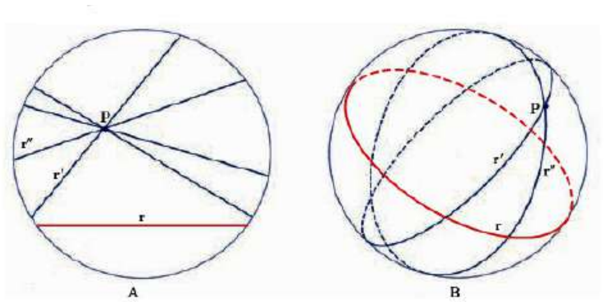
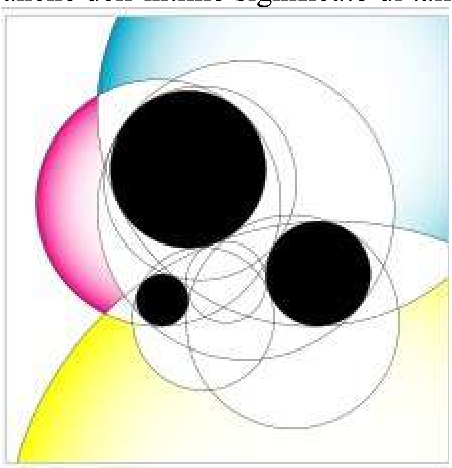


Fig. Geometria non Euclidea

Geometria. nella quale non vale il 5° postulato di Euclide
, o postulato delle parallele (per un punto esterno a una retta passa una e una sola parallela a una retta data;. Tale g. è in altre parole un sistema ipotetico-deduttivo costruito in base ai postulati della geometria euclidea a esclusione del 5°. Esistono due tipi di geometria non euclidea, Iperbolica o di Lobačevskij, nella quale si postula che da ogni punto escono due parallele a una retta data, e la g. ellittica o di Riemann, nella quale si postula la non esistenza di parallele. Si conoscono anche altri modelli,
Geometria numerativa È quella teoria matematica, che si occupa della determinazione a priori del numero delle soluzioni di un problema di carattere algebrico. Nella g. numerativa prevalgono due indirizzi: quello numerativo, che si occupa solo della determinazione di caratteri numerici, e quello funzionale, che si occupa anche dell’intimo significato di tali numeri.



Fig, cerchi di Apollonio

Il problema di Apollonio è uno dei primi esempi di geometria enumerativa. Questo problema richiede il numero e la costruzione di cerchi tangenti a tre cerchi, punti o rette dati. In generale, il problema per tre cerchi dati ha otto soluzioni, che possono essere viste come 23, ciascuna condizione di tangenza che impone una condizione quadratica allo spazio dei cerchi. Tuttavia, per disposizioni speciali dei cerchi dati, il numero di soluzioni può anche essere qualsiasi numero intero da 0 (nessuna soluzione) a sei; non c'è accordo per il quale ci sono sette soluzioni al problema di Apollonio.

Geometria proiettiva È l’insieme delle proprietà delle figure degli spazi proiettivi, che sono invarianti rispetto alle proiettività, cioè alle trasformazioni direttamente legate alle operazioni di proiezione e sezione; Se le origini della g. proiettiva si possono far risalire agli studi di prospettiva degli artisti del Rinascimento, la sua sistemazione come disciplina scientifica si ha soltanto con J.-V. Poncelet e con K.G.C. Staudt; quest’ultimo, in particolare, ne ha dato una costruzione di notevole perfezione ed eleganza.

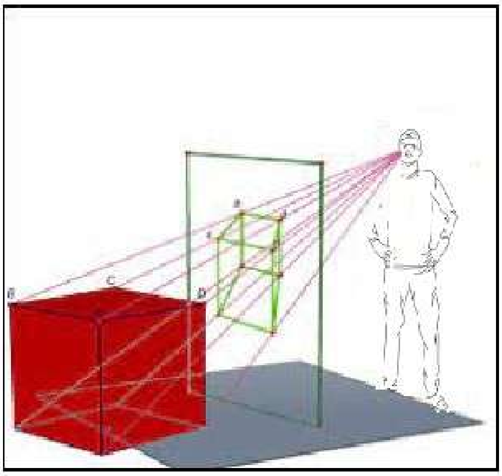


Fig. Geometria proiettiva

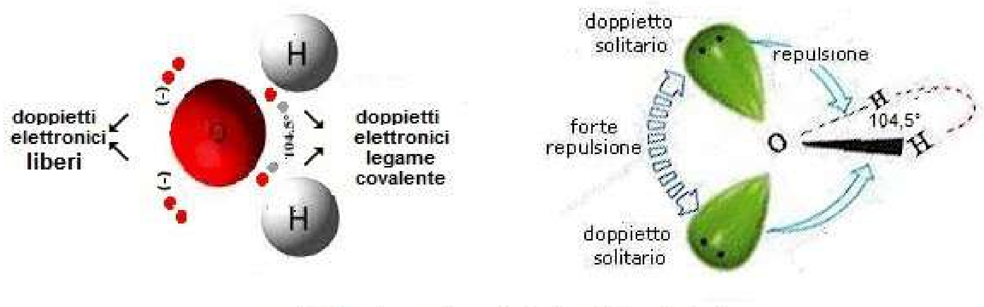
Geometria e fisica

Dalla geometria sono nate nuove idee per la fisica: di simmetria speculare (mirror symmetry) e di coomologia quantica (quantum cohomology), motivate da teorie fisiche quali la teoria delle stringhe e la teoria quantistica dei campi. La teoria delle superstringhe suggerisce che la parte compatta della varietà spazio-tempo sia una varietà compatta complessa lisciaX, di dimensione tre, tale che la classe canonica KX sia banale. Complessi studi sull'argomento sono apparsi già nel 1879in un problema affrontato classicamente da H. Schubert nel 1879, da Kontsevich e J. Manin (1994), usando la coomologia quantica, nel 1995 da M. Kontsevich,. Va citata la dimostrazione di De Jong nello studio delle singolarità, l’esistenza dello spazio dei moduli delle curve stabili. In ambito diverso, importante è stata anche la dimostrazione, data da K.S. Donaldson, della complessità degli spazi euclidei quadridimensionali, complessità che li distingue dagli spazi euclidei in altre dimensioni, e la dimostrazione, data da M.H. Freedman, della congettura di Poincaré

Geometria e chimica

LA FORMA DELLE MOLECOLE — Le proprietà di molte sostanze come odore e il sapore dipendono dalla forma delle molecole. Da questa osservazione R. Gillespie ipotizzò e mise a punto nel 1957 una teoria indicata con la sigla VSEPR (Valente Shell Electron-Pair Repulsion - Repulsione delle Coppie Elettroniche del Guscio di Valenza) che permette di ricavare le strutture molecolari utilizzano le formule di Lewis

Lo scienziato osservò che in una molecola la disposizione degli atomi intorno a un atomo centrale dipende dal numero di doppietti elettronici coinvolti. Essi essendo carichi negativamente si respingono disponendosi tra loro il più lontano possibile .



modelli diversi per spiegare la struttura della molecola d'acqua

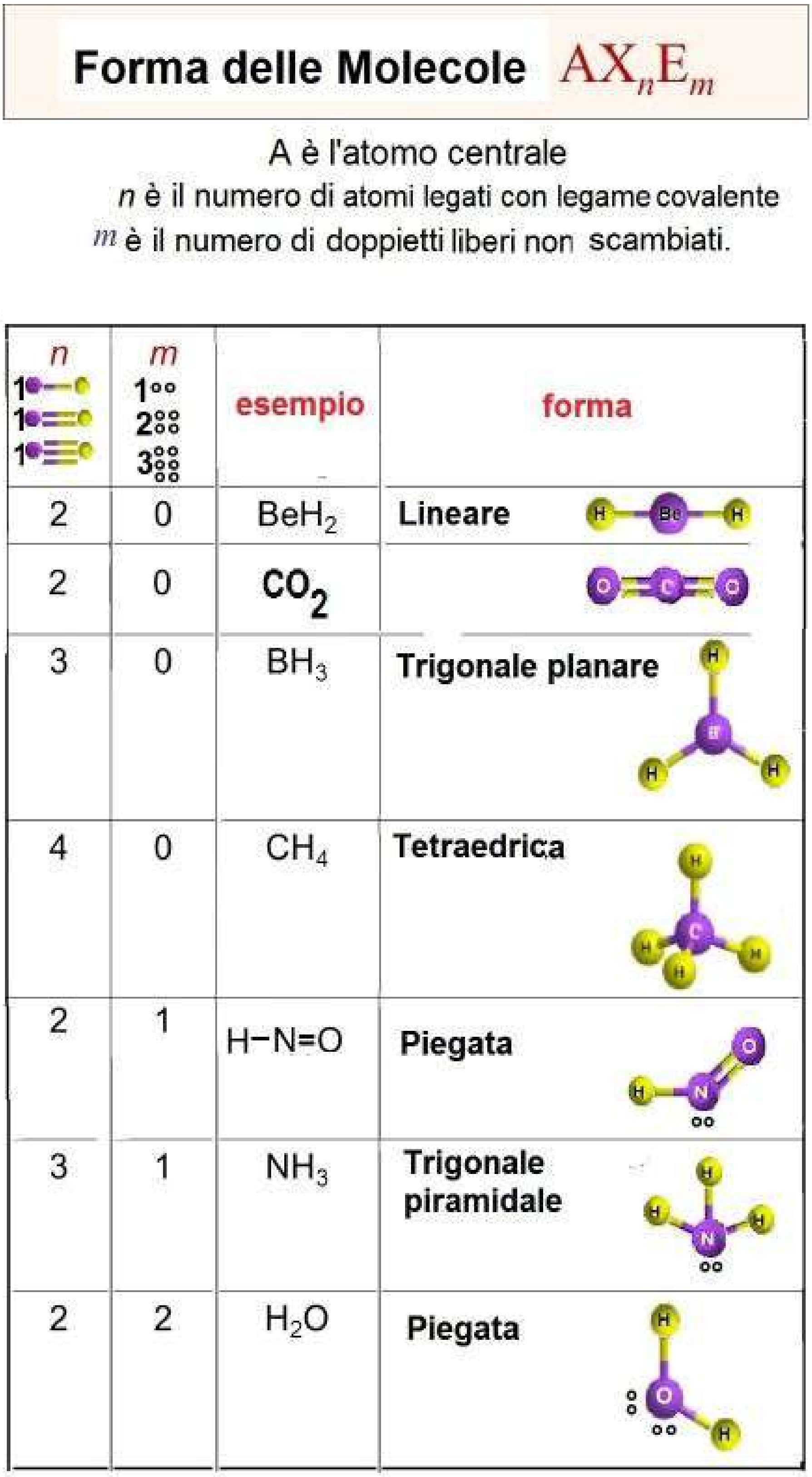
Fig. H2O disposizione spaziale

Per doppietti elettronici intendiamo coppie di elettroni impegnati nel legame covalente, sia i liberi non scambiati. Si osserva anche che e tra due coppie libere di elettroni non impegnate in un legame) la repulsione è maggiore di quella tra coppia di elettroni di legame e coppia libera;.A sua volta, la repulsione è maggiore della repulsione tra due coppie di elettroni di legame.

I legami covalenti doppi e tripli, ai fini della geometria molecolare, «valgono» quanto un legame covalente singolo. Perciò, dalla formula e dal numero di coppie elettroniche libere e di legame possiamo risalire alla disposizione nello spazio della molecola. Il tipo di molecola si schematizza così:

fig. AXE

Per calcolare il numero dei gruppi elettronici che determinano la forma della molecola sommiamo il **numero di atomi (Xn) légati all'atomo centrale** e il **numero di coppie elettroniche libere (Em)** possedute dall'atomo centrale: numero di gruppi = Xn + Em



Forma delle Molecole AX_nE_m

A è l'atomo centrale

n è il numero di atomi legati con legame covalente

m è il numero di doppietti liberi non scambiati.

n	*m*	esempio	forma
2	0	BeH_2	Lineare
2	0	CO_2	
3	0	BH_3	Trigonale planare
4	0	CH_4	Tetraedrica
2	1	H−N=O	Piegata
3	1	NH_3	Trigonale piramidale
2	2	H_2O	Piegata

Fig. forma molecolare vsepr

Consideriamo, per esempio, la molecola BeH2; rappresentiamo la sua struttura di Lewis: Si tratta quindi di una molecola del tipo AX2: un atomo centrale e due atomi che formano un legame covalente ciascuno. Ma come sono disposti questi atomi? In altre parole, dobbiamo stabilire se BeH2 è una molecola lineare (in questo caso gli atomi si trovano su una retta e formano un angolo di 180° oppure no (in questo caso gli atomi formano un angolo minore di 180°. Osserviamo le coppie di elettroni di valenza intorno all'atomo centrale, il berillio. In questa molecola, il berillio forma due legami covalenti, utilizzando due coppie di elettroni. In che modo esse possono sistemarsi il più lontano possibile tra di loro? La risposta è che la repulsione è minima quando le due coppie di elettroni si trovano da parti opposte rispetto al nucleo. La figura mostra una localizzazione approssimata delle nubi elettroniche: Dato che queste coppie di elettroni formano i legami con gli atomi di idrogeno, questi ultimi devono trovarsi in corrispondenza delle nubi elettroniche. La molecola di BeH2 quindi sarà lineare: Consideriamo ora la molecola BH3 di tipo AX3: la sua struttura di Lewis è: Il boro (l'atomo centrale) forma tre legami covalenti. Quale disposizione possiamo prevedere per le tre coppie di elettroni di legame? Il modo per sistemarle il più lontano possibile è collocarle ai vertici di un triangolo equilatero intorno all'atomo centrale: Una volta legati i tre atomi di idrogeno, la molecola che ne risulta è triangolare, o meglio triangolare planare, con gli atomi giacenti tutti sullo stesso piano: I dati sperimentali hanno confermato che questa è la forma della molecola. Nella molecola CH4 (modello AX4), l'atomo centrale di C possiede 4 elettroni di valenza con i quali forma 4 legami con altrettanti atomi di H, ognuno dei quali mette 1 elettrone a disposizione. La massima distanza possibile fra le coppie di elettroni di legami è 109,5° nello spazio. La molecola che si forma è perfettamente simmetrica e ha struttura tetraedrica (se gli atomi di H si disponessero planarmente intorno all'atomo di C, le coppie di elettroni si posizionerebbero alla distanza di 90° .

Finora abbiamo considerato molecole la cui forma era determinata esclusivamente da doppietti elettronici di legame. | —C— | Vediamo ora qual è la forma delle molecole che presentano coppie di elettroni liberi. Tali coppie rappresentano regioni di elevata densità elettronica e quindi tenderanno a disporsi il più lontano possibile dagli elettroni di legame. In questo modo concorrono a determinare la forma della molecola. Per determinare la geometria di queste molecole, quindi, dobbiamo dapprima considerare la disposizione di tutti i gruppi elettronici disposti attorno all'atomo centrale in modo da ridurre al minimo la repulsione; denominiamo poi la forma della molecola considerando solo la posizione degli atomi. Consideriamo per esempio la molecola dell'ammoniaca NH3. Si tratta di una molecola del tipo AX3E1 ; la struttura di Lewis mostra infatti che l'atomo centrale (l'azoto) forma tre legami covalenti con tre atomi di idrogeno e possiede una coppia di elettroni liberi: I gruppi elettronici in totale sono quattro (tre coppie di legame e una coppia libera); questi gruppi si disporranno a formare un tetraedro. Però, a causa della maggiore repulsione esercitata dalla coppia di elettroni liberi, gli angoli di legame N—H anziché essere di 109,5° sono pari a circa 107,3°. La forma della molecola è piramidale triangolare. La molecola dell'acqua H2O è invece una molecola del tipo AX2E2. Intorno all'ossigeno si trovano quattro gruppi elettronici; a differenza dell'ammoniaca, si tratta però di due coppie di legame (con l'idrogeno) e due coppie libere.
I quattro gruppi si dispongono a tetraedro, ma l'effetto delle due coppie di elettroni liberi sui legami O—H è ancora più forte, e gli angoli di legame scendono a 104,5°. La forma della molecola è piegata. Il discorso non cambia in presenza di legami doppi o tripli. In entrambi i casi, le coppie di elettroni di legame devono stare necessariamente tra i due atomi. Per prevedere la geometria molecolare, quindi, possiamo trattare il doppio e il triplo legame come se si trattasse di un legame semplice.

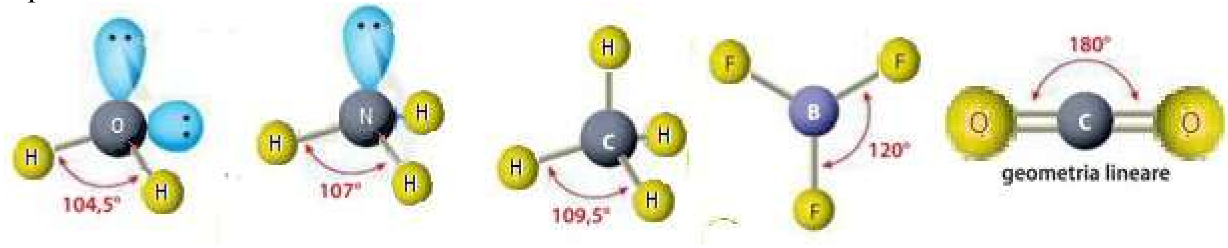


Fig. angoli di legame

Stereoisomeria

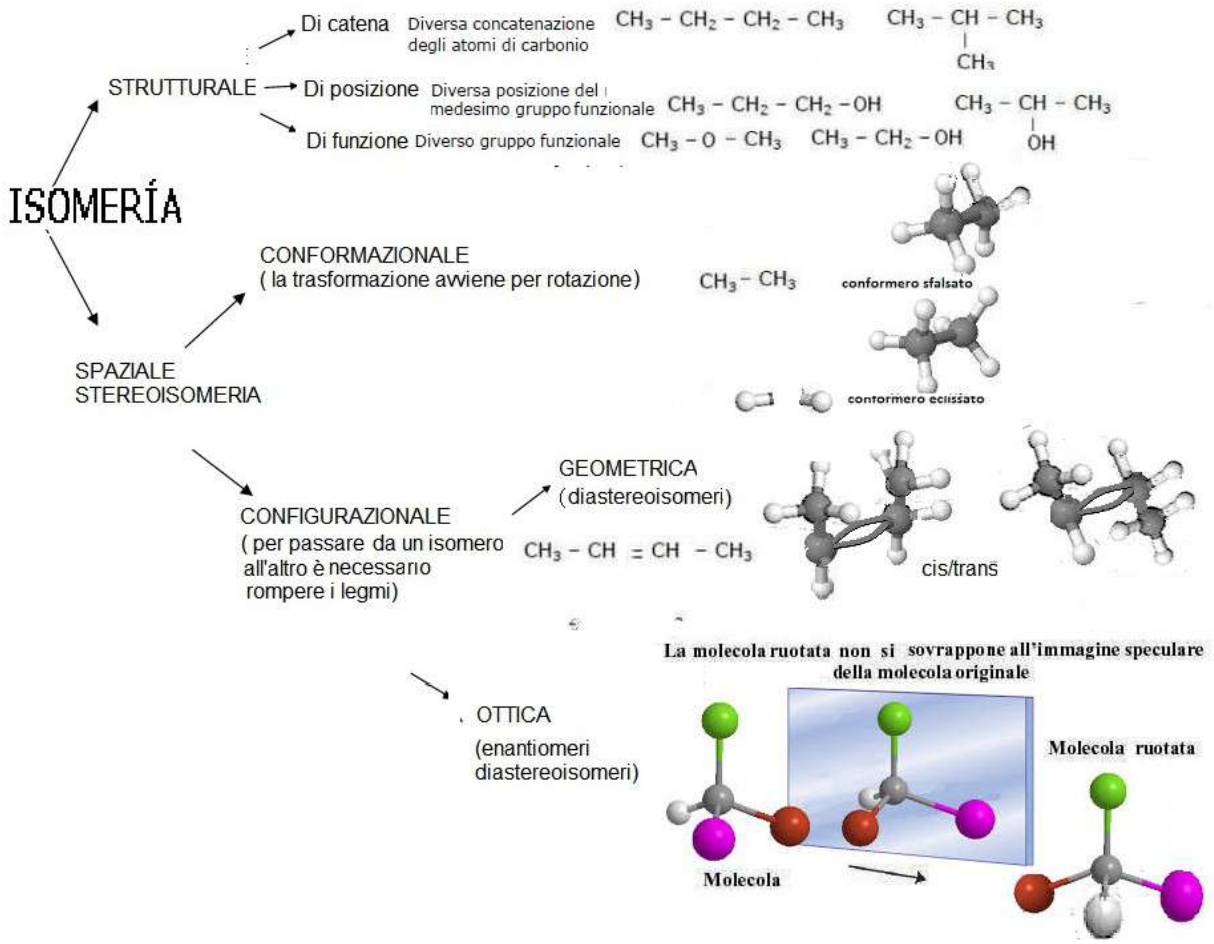


Fig . stereoisomeria

STECHIOMETRIA

La **stechiometria**, (dal greco misura degli elementi) . Una reazione tra sostanze implica proporzionalità legate alla loro molarità (concentrazione di una soluzione espressa dal numero di moli di soluto disciolte in un litro di soluzione (simbolo *M*) ; Il numero di moli (n) si calcola dividendo la massa data (m), espressa in grammi, fratto la massa di una mole espressa come peso molecolare (PM)

La stechiometria si sviluppa dall'analisi della formula chimica che si costruisce geometricamente a partire dagli elementi e dalla loro valenza (la capacità degli atomi di combinarsi con altri atomi , la valenza si esprime in numeri che derivano dalla struttura elettronica dell'elemento considerato)

Il chimico dopo aver calcolato il numero di moli di reagenti in una reazione, dopo aver bilanciato l'equazione, ottiene un numero di moli di prodotto. Sia prima che dopo la reazione il chimico trasforma grammi in moli (moli = grammi//peso molecolare) e successivamente moli in grammi (grammi = moli x peso molecolare) esempio

Una equazione chimica si può esprimere con simboli grafici o con lettere

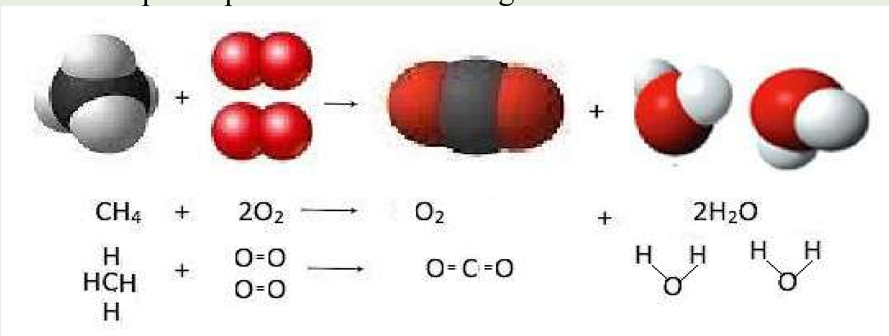
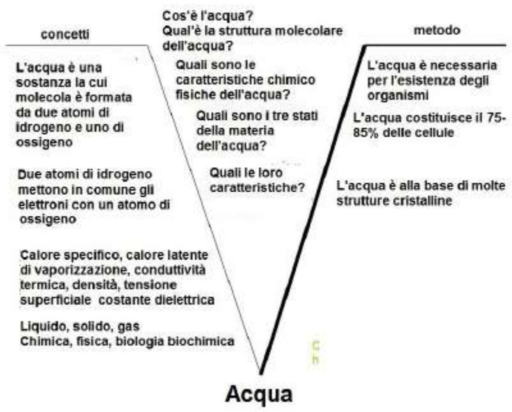
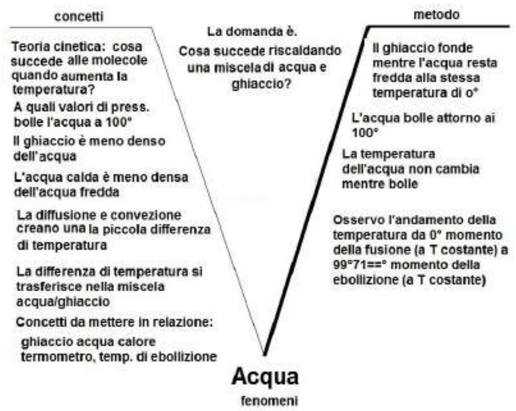


Fig. equazione di reazione

Dall'equazione chimica si passa al bilanciamento dell'equazione, sfruttando i coefficienti stechiometrici (nel nostro caso perché si possa dire che la reazione è bilanciata si raddoppiano ossigeno e acqua.) Nelle equazioni più complesse si individuerà l'eventuale reagente limitante. Un aiuto alla modellizzazione dei concetti ci viene dalla applicazione della V di Gowin in cui il problem solving si sviluppa dalla domanda e dalla analisi per giungere   alla sintesi.

…





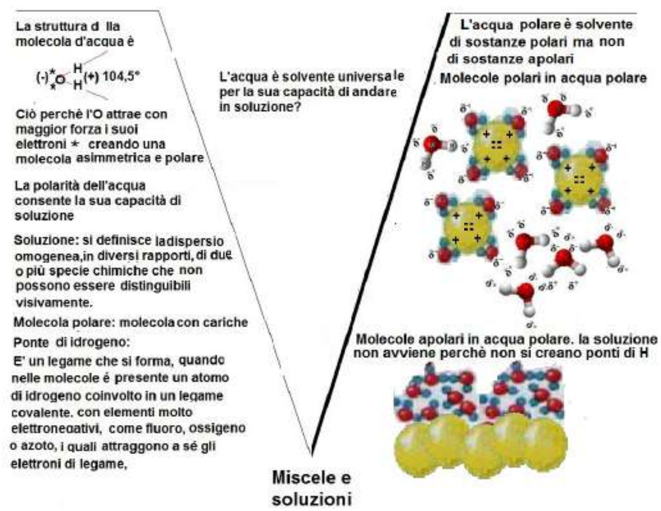


Fig. Diagramma di Gowin applicato alla chimica

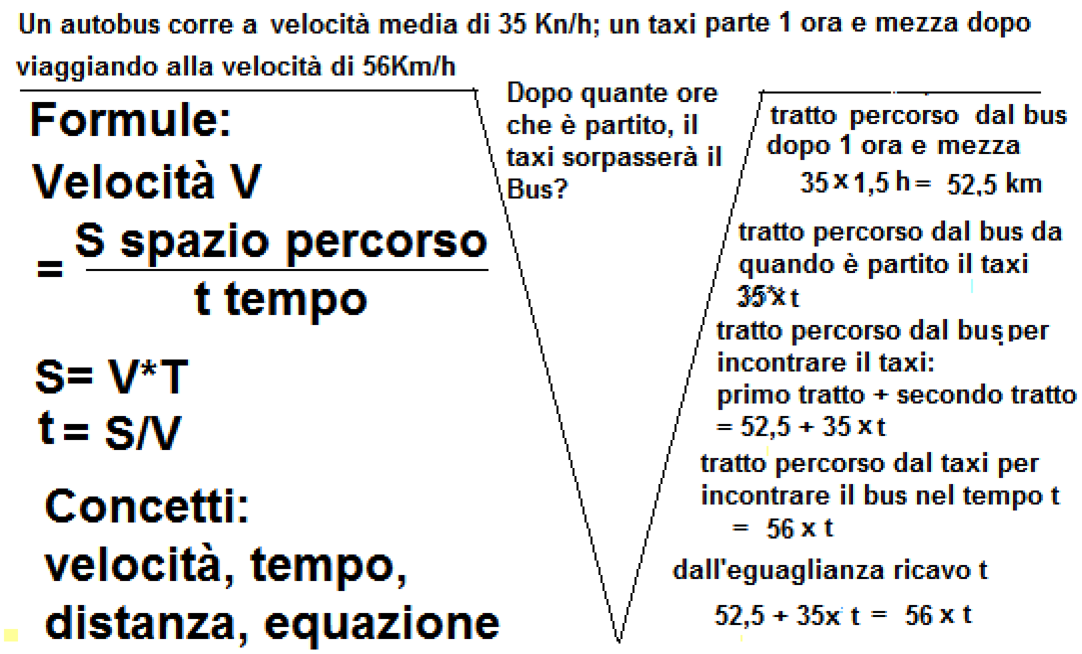


Fig. Diagramma di Gowin applicato alla matematica

Misconcezioni

Sinonimo che intende “errore”, “idea sbagliata”, “malinteso”; termini usati spesso a proposito di problem solving, insieme delle idee o per spiegarne le interazioni. e le convinzioni errate. Il tema è stato sviluppato da degli studiosi di didattica della matematica. In seguito diversi Autori hanno preso in esame le “misconcezioni” come cause di errori o meglio ancora cause sensate di errori, abbagli spesso ben motivabili ed a volte addirittura convincenti, frutto di conoscenza, non assoluta mancanza di conoscenza. Per alcuni studiosi della didattica si parla di misconcezione come possibile momento di passaggio spesso necessario alla creazione di un concetto. Si arriva a distinguere le misconcezioni in due grandi categorie: “inevitabili” ed “evitabili” le prime non dipendono dalle scelte dell'insegnante come le seconde che nascono alla trasposizione didattica.
Le “inevitabili” non sono per forza eliminabili, esse costituiscono un momento delicato e necessario per il passaggio da una prima concezione ingenua e spontanea a una più elaborata.
Le “evitabili”, invece non sono necessarie e possono derivare dall’azione didattica dell’insegnante in aula.
Un esempio è quello che si trova in molti libri scolastici in cui per l’apprendimento geometrico si esprime in termini come orizzontale, verticale, obliquo, laterale, oggetti orientati in relazione alla gravità e non con caratteristiche “**assolute**” dell’oggetto matematico, come parallelismo, perpendicolarità, congruenza dei lati o degli angoli, illimitatezza, …, mettendo in evidenza le proprietà “relative” dell’oggetto, che dipendono dal punto di vista, trascurando il mondo geometrico dove non esistono “direzioni privilegiate”.
La didattica della geometria dunque sarà possibile solo se non si sottomette l’apprendimento a rigidi vincoli spaziali; l'analisi degli oggetti indipendentemente dalla loro posizione rende più abile lo studente nel riconoscere, esplorare, modellizzare la realtà e governare le situazioni spaziali in tutta la loro complessità;
Esempi di misconcezioni “inevitabili” (tratte dalla letteratura e sperimentazioni) : Quando un insegnante mostra per la prima volta ad un bambino di scuola dell’infanzia un modello di cubo

rosso, di legno, di una certa dimensione e gli dice: «Guarda, questo è un cubo», il bambino potrebbe credere che il nome "cubo" deve essere attribuito ad un oggetto rosso, di legno, di quelle determinate dimensioni. Ma se l'insegnante avrà in seguito la sensibilità didattica di creare le condizioni per superare queste misconcezioni, mostrando modelli di cubi, non di legno, non rossi, non di quelle dimensioni, per poi fornire nel tempo diverse rappresentazioni in vari registri, il bambino lentamente compirà dei passi in avanti nella costruzione del concetto.
Al contrario, se l'insegnante mostrerà all'allievo sempre la stessa rappresentazione del concetto, si potrebbero verificare ostacoli di tipo didattico per il futuro apprendimento. dunque "evitabili".
Un'altra misconcezione è quella ello studente che identifica l'archetto disegnato tra due semirette per indicare l'angolo.
Esempi di misconcezioni "evitabili" 1. Uno degli esempi più chiari e riconoscibili di questo tipo di misconcezione verte su un fatto avvenuto durante un esame di Matematica all'Università, presso la Facoltà di Scienze della Formazione Primaria. In questa occasione si è chiesto ad uno studente non frequentante di spiegare che cos'è un angolo. A questa sollecitazione del docente lo studente risponde: «Un angolo è la lunghezza dell'arco» e, dopo aver chiesto se poteva disegnare, lo studente realizza la seguente "classica" rappresentazione che mette in evidenza l'arco che, a suo parere, identifica l'angolo: Alla provocatoria sollecitazione del docente: «Allora, a mano a mano che ti sposti con l'"archetto" l'angolo diventa sempre più ampio?», supportata dalle seguenti aggiunte al precedente disegno: lo studente risponde: «È vero, non ci avevo mai pensato!» La continua, univoca e impropria rappresentazione basata sull'"archetto" fornita da insegnanti diversi, anno dopo anno, ha dato forza nella mente dello studente a caratteristiche "parassite" della semiotica a sfavore del concetto stesso. L'allievo ha cioè considerato alcune informazioni derivanti dalla rappresentazione, in questo caso la lunghezza dell'"archetto", come caratteristica rilevante del concetto in gioco, anche se in realtà esse sono in contrasto con il sapere matematico. In altri casi, l'"archetto" ha condizionato alcuni studenti a concepire come angolo la parte di piano limitata dall'"archetto" stesso. La misconcezione che si è generata nell'allievo è quindi, a nostro parere, "evitabile" in quanto dipende da due diverse cause: la reiterata proposta della stessa rappresentazione fornita da insegnanti, ma anche la scelta della rappresentazione stessa che, meno di altre, rispetta le proprietà del concetto che si vuole far apprendere (la limitatezza dell'archetto e della parte di piano da esso individuata, contrasta con l'illimitatezza dell'angolo in matematica). 2. Durante una sperimentazione in una classe IV di scuola primaria si è presentata la seguente situazione, ampiamente studiata nella letteratura di ricerca in didattica della matematica. Dopo aver costruito dei fogli quadrati di carta dove si erano anche evidenziate le pieghe in corrispondenza delle diagonali, il ricercatore ha disposto il proprio modello di quadrato nella seguente "inaspettata" posizione rispetto a quella "classica" scelta dai bambini per parlare di quadrato: A questa provocazione i bambini hanno obbiettato: «Quello che hai in mano tu è un rombo, quello che abbiamo in mano noi è un quadrato». (I bambini tenevano il quadrato disposto nel modo stereotipo classico, con due lati paralleli al pavimento). Il ricercatore ha allora sollecitato la discussione domandando loro: «Perché quello che ho in mano io è un rombo e il vostro è un quadrato?». Bambini: «Perché la maestra ci ha detto che il rombo ha le diagonali orizzontali e verticali, mentre il quadrato ha le diagonali oblique». Nella logica di ciò che era stato loro insegnato, i bambini avevano ragione: la risposta risultava coerente rispetto all'insegnamento che avevano ricevuto. La rappresentazione e soprattutto l'indicazione verbale che l'insegnante aveva fornito ai propri allievi, in buona fede, allo scopo di aiutarli, risultava in realtà un ostacolo all'apprendimento, dato che fissava l'attenzione solo su una particolare posizione assunta dall'oggetto. Tale posizione appariva intuitiva per gli allievi, essendo percettivamente immediata, ma celava le caratteristiche matematiche del concetto

Un ricordo

Entrambi stavamo passando un momento difficile per il lavoro. "Tutti noi abbiamo problemi … si risolveranno" sembravano recitare le pallide figure che incrociavano i nostri passi. E' tutto vero … ci abbandonammo ad una seria discussione sulle conseguenze matematiche dei sette ponti di

Königsberg.

Parlammo della guerra, dei ponti..., del fiume Pregel, della "Montagna del re" città natale di Kant ma anche di David Hilbert, Christian Goldbach e Rudolph Otto Sigismund Lipschitz. della città rasa al suolo alla guerra e rinominata Kaliningrad