

# Appunti da un corso di Perfezionamento biennale all'Università Cattolica di Brescia del 1998 sulla didattica della Matematica concetto di ottimo e spunti sulla didattica delle diverse abilità

giorgio maggi

## INTRODUZIONE

Straordinaria e singolare è stata l'esperienza in questi due anni di Corso di Didattica della Matematica (coordinatrice prof.ssa Marina Dalè) in quanto ho avuto l'opportunità di riflettere su alcuni aspetti poco conosciuti della scienza sia di tipo epistemologico che di relazione tra discipline scientifiche, deduttivo-matematiche, didattiche.

Dalle lezioni del prof Carlo Felice Manara e prof.ssa Raffaella Manara sullo "studio ed analisi delle strategie risolutive per i problemi" nasce, con la necessaria modestia dello studente universitario neofita e nel contempo la consapevolezza dell'insegnante di scuola superiore, la curiosa idea di capire meglio il problema dell'ottimo.

Meglio, come?

Un mio vecchio insegnante di chimica soleva sostenere che ..... "La misura della quantità di acido solforico prodotto in un Paese è sempre proporzionale alla misura della sua civiltà" (sic!)...; altri valutavano corretto un disegno di impianto chimico che rispettasse alla lettera le norme UNICHIM e nel quale fosse raffigurato, ben evidente, anche il pozzetto (ma a che serve il pozzetto? Per eliminare le scorie evidentemente!)

In un tema d'Esame di Stato per periti chimici si richiedeva di elaborare l'ottimizzazione di un impianto: il novello diplomando affrontò il problema studiandone l'economicità come se fosse un sistema chiuso ..... a nessuno venne di parlare del "pozzetto" e di quanto le sue emissioni avrebbero influito sull'ambiente (forse era in programma il tema ..... ma in quello di Scienze e non di Impianti chimici industriali!)

Ho un dubbio: le stesse mie perplessità potranno valere per geometri, ragionieri, generici tecnici usciti dalle nostre scuole?

Da queste mie osservazioni nasce il lavoro oggetto della tesi che, al di là della impostazione personale, vuole contribuire a sottolineare l'importanza di sinergie tra discipline nell'affrontare un problema vitale e per offrire all'allievo una visione organica del sapere in una immagine coerente e non frammentaria della realtà.

giorgio maggi

Gli appunti si traducono in concetti molto sintetici portati alla discussione d'esame di specializzazione nella didattica della matematica e ricostruiti in sintesi per tentare di elaborare un personale diario che, nella semplicità degli spunti, possa rimanere come piacevole ricordo.

## **INDICE**

Esame di storia con il prof. Pierluigi Pizzamiglio

Esame di Epistemologia prof. Paola Negri

Esame: Concezione attuale della scuola prof Giuseppe Bertagna

Esame: Il piacere alla matematica prof/ssa Raffaella Manara

Esame: Epistemologia prof.ssa Valentina Gazzaniga

Esame Elementi di calcolo delle probabilità prof. Fortunato Pesarin

Esame statistica prof Silio Rigatti Luchini

Esame Rappresentazione della Matematica Apprendimento prof Alessandro Antonetti

## LAVORI DI GRUPPO E MODELLI DIDATTICI

### APPROFONDIMENTI D'ESAME

#### L'OTTIMO

### INSEGNANTI E SINTESI PER APPUNTI DELLE LEZIONI

prof,Don Pierluigi Pizzamiglio Univ. Cattolica (BS) (13 novembre 1998)

**DOMANDA e oggetto della relazione: Che sensò ha e come di può introdurre la dimensione storica nell'insegnamento scolastico della matematica.**

( Perché )

Se si pone crudelmente la domanda in oggetto al chimico con infarinature epistemologiche (e cioè con sue personali convinzioni sulla teoria generale della conoscenza scientifica e dei fondamenti e criteri del sapere ) con esperienza didattica da esordiente nell'insegnamento della chimica industriale e organica,

estro e gusto del paradosso solleticherebbero lo spirito del neofita, (soprattutto se il neofita e chimico è lo stesso che scrive) ad una risposta legata alle ermetiche letture fatte in giovinezza sull'alchimia, e su quanto siano connesse alla scienza , vita e spirito dell'uomo.

Dunque ,in una prima affrettata risposta alla domanda su quale sia il senso dell'insegnamento della storia nella scienza, penso non si debba sottovalutare il peso che può avere la narrazione del passato e la ricostruzione storica nel riappropriarsi del **piacere della conoscenza e del sapere come scoperta** .

Eliminato dalla scienza ogni problema metafisico (fisicalismo), espressi i concetti in funzione di operazioni logiche, matematiche, sperimentali (operazionismo), fissato che è l'esperienza la base di ogni conoscenza (empirismo,neopositivismo) e giudicata valida una teoria non solo sulla sua dimostrabilità ma sulla sua resistenza ai tentativi di falsificazione (falsificazionismo di Popper)

Si potrà impostare in classe un programma in cui alla :

- definizione dei concetti ,
- applicabilità teorica nel calcolo
- applicabilità pratica con l'esperienza di laboratorio,

si possa attraverso un percorso di tipo storico arrivare a comprendere il significato dei simboli, delle convenzioni, della logica del pensiero Pitagorico, della limitatezza delle intuizioni e generalizzazioni, del profondo valore del metodo della analisi.

Un atteggiamento critico verso la scienza del passato, attraverso la sua evoluzione, e la scoperta di problemi complessi e elaborazione di formule sintetiche , servirebbe allo studente a raggiungere : **sensibilità e consapevolezza** sia scientifica che storica , dunque la storia intesa come un fondamentale **valore FORMATIVO** a completamento del

rigore didattico imposto dai programmi.

Se formare significa capire e farsi capire , per formare serve metodo: ad esempio parlare di **geometria analitica** significa parlare di Cartesio ,metodo cartesiano della scoperta (ars inveniendi) e sua differenza col metodo euclideo della parola ( ars demonstrandi dove il rigore matematico è legato ai sillogismi e alla retorica) , di Galileo Galilei (la cui più sensibile innovazione di G. rimane comunque l'aver assegnato al termine *esperienza* il significato di esperimento attivo, in antitesi a quello di semplice osservazione ) e quindi introdurre Popper (fortemente critico verso lo storicismo che ipotizza leggi all'interno del divenire storico e proponendo in alternativa un approccio `aperto', costantemente modificabile in dipendenza dalla realtà e chiuso a ogni tentazione di determinismo. come prevede il metodo induttivo.)

Parlare di storia della matematica significa anche capire il primo metodo di calcolo assiro babilonese(1), o il metodo greco(3) in cui l'algebra viene assimilata alla geometria (geometria euclidea), o il metodo arabo(2) in cui vengono fissate le regole specifiche , o il metodo del '500 italiano (1) in cui nuovi problemi vengono risolti, o il metodo Cartesiano (1600) (2) in cui si sviluppa la geometria analitica

Parlare di storia della matematica significa introdurre i seguenti concetti :

- Sviluppo diacronico e contestuale o contemporaneo (datazione e cronologia ad esempio 1,3,2,1,2 è lo sviluppo anagrafico temporale del metodo mentre 1,2,3,1,2 può considerarsi sviluppo logico
- Biografie : dalla semplice biografia del matematico si può passare alle sue opere e al suo pensiero
- Opere : dal titolo ,data, indice si passa a capire la struttura logica dello scritto e del pensiero
- Temi, argomenti : un argomento può essere trattato in prospettiva storica
- Musei e mostre :

### **All'esame con POSSIBILI RISPOSTE O MALINTESI ALLA DOMANDA INIZIALE:**

a) La storia della matematica serve per rendere più semplici le teorie matematiche .ERRORE!!!!

La biografia non deve coincidere con gli aneddoti,il pettegolezzo, approssimazioni, sentito dire, presunta esattezza, ma deve servire a capire la cronologia, il metodo storico, il rapporto col passato, serve a chiarire storicamente, a spiegare come sono andate effettivamente le cose.

La storia può chiarire i concetti di equivalenze in Euclide e le differenze in Leibnitz

b) Due modi sbagliati d'uso della storia: 1)Far coincidere la storia con gli aneddoti è un errore mentre si possono ricordare i paradossi come quello di Zenone; 2)Insegnamento per sostenere le proprie idee,ideologie o manie (ad usum delphini) è un uso STRUMENTALE della storia mentre la storia deve essere funzionale all'educazione di una sensibilità storica.

C)Prospettiva sistematica o prospettiva storica

La creatività dello scienziato non stà nella esposizione ma nei contenuti

(un aneddoto: in sede d'esame il prof. Pizzamiglio mi chiese come affrontare la lezione sulla gravità. Risposi che avrei iniziato con l'esperimento della caduta dei gravi che Galileo fece dalla torre di Pisa ... il prof , si arrabbiò con “ non si raccontano balle agli studenti” ed argomentò sulla differenza che c'è tra gioco ed esperimento scientifico ...

## prof Paola Negri- (27.11.98)

- CONCETTI DI EPISTEMOLOGIA

Per parlare di epistemologia devo assolutamente partire da ARISTOTELE (episteme logos = scienza esatta) e TALETE "avendo meditato sull'insegnamento matematico.....mi misi a leggere le opere di tutti i filosofi....." per arrivare a COPERNICO e EINSTEIN: "a chi mi chiede quando per la prima volta pensai alla relatività? lo rispondo sempre" : leggendo HUME(1700) e MATCH(1800)

- SEQUENZA STORICA DI EPISTEME

ARISTOTELE(Metafisica)- S.TOMMASO(Teologia)- GALILEO(Meccanica)-  
CARTESIO(Geometria)- à NEWTON(Fisica)- HILBERT(Logica)

- NESSUNA SCIENZA E' EPISTEME O SCIENZA ESATTA

Infatti scienza è definita un animale a 4 zampe (empirismo razionalismo, immaginazione, verifica o controllo)

Inoltre poiché scienza è LEGGE (Galileo,Newton),TEORIA (Newton), IPOTESI\_(Bohr Heisemberg)

Immaginazione e ipotesi limitano il concetto di scienza esatta.

- IPOTESI = parola chiave nella scienza

Newton1687 Philosophie Naturalis Principia Mathematica ="numero non è una moltitudine di unità , ma il rapporto tra una qualunque quantità e un'altra quantità dello stesso genere assunta come Unità

Piaget1971 Initiation au calcul = "ma l'uomo non può capire come abbia costruito le matematiche e la logica se non studiando se stesso filosoficamente e psicologicamente"

Hilbert ="nella storia di ogni teoria matematica si possono distinguere chiaramente 3 fasi : CREATIVA,FORMALE, CRITICA"( che poi sono tesi, antitesi e sintesi della critica hegeliana o la letio, quaestio, disputatio di Gerardo da Cremona)

Peirce (pragmatista americano) definisce ABDUZIONE la invenzione della ipotesi e quindi il momento intuitivo della scoperta (Induzione- Abduzione- Deduzione)

## prof Giuseppe Bertagna

- Concezione attuale della scuola : PRAGMATICO FUNZIONALISTA : dunque scuola utile, funzionale che permette l'acquisizione di competenze
- Critica alla concezione di scuola dei nuovi programmi : SCUOLA NON PIU' LUOGO DEL SAPERE(educazione) MA LUOGO DELL'UTILE(formazione) = INSEGNANTE COME TECNICO E NON PIU' EDUCATORE.

1. i nuovi programmi 1979 e succ 1985 su scuola elementare richiederebbero 15.000 ore frontali e non le 5.000 della realtà
2. nei nuovi progr. 1997 sul riordino dei cicli di Berlinguer si parla di scuola come sistema sempre più "fuori mercato" e di studenti o allievi o ragazzi come "risorse umane" (che fine ha fatto Kant quando pensa che l'uomo sia un fine e non un mezzo?)
3. Si introduce il concetto mercantile del "debito e credito formativo" (dimenticando il dibattito, la dialettica, lo spirito che quando manca rende

l'uomo un semplice tronco (Aristotele)

4. Esame di maturità viene sostituito da "esame finale di stato" (scopo :verifica di competenze e non più di maturità , dunque il sapere senza il senso del sapere).

- Perché Educazione e non solo formazione ? perché educazione è transfert, simpatia, antipatia, relazione, vitalità e valori umani non solo utilitaristici.
- Che differenza indicare tra educazione e formazione?

FORMARE = insegnare a saper fare

EDUCARE = insegnare a saper fare con il *senso* del saper fare

Ad esempio non si può solamente "dire la verità", se non la si accompagna alla comprensione del senso della verità!

Pilato chiese a Gesù quale fosse la verità e Gesù non rispose perché ad una domanda sbagliata non c'è risposta

E' sicuramente vero che Lutero 31.10.1517 affisse sulla porta della chiesa di Ognissanti a Wittenberg le *Novantacinque tesi* in cui egli impugnava la pratica delle indulgenze, ma è altrettanto sicuro che una affermazione simile avrà valore solo se ha un senso ( ad esempio per uno storico, per un religioso, per un politico....ecc..)

Alla domanda << a che cosa serve sapere che...>> si può rispondere quindi con l'educazione e si deve rispondere

- **Quali considerazioni sulla educazione si possono acquisire dagli antichi filosofi? Il connubio scuola/allievo è fondamentale ed è impensabile una scuola che faccia esami di quinta senza un ciclo di studi (dopo 22 anni si può)**

Platone : nei dialoghi con con Socrate l'allievo Taigete dice di avere eletto Socrate come maestro e quest'ultimo risponde che prima lui come maestro ha accettato l'allievo...

Russel sostiene che la scuola è dalla parte dell'allievo e dà grande importanza alla interdisciplinarietà

- **Considerazioni sulla educazione: premesse filosofiche, concetti di capacità e competenze**

Aristotele : quando si è ignoranti non ci si vuole istruire ; gli uomini per natura vogliono conoscere: se non si esercita questa disposizione , la disposizione naturale atrofizza

Rousseau: quando si è servi non si vuole diventare liberi

Sindrome di Peter Pann: quando si è piccoli non si vuole diventare adulti

Concetto di capacità : disposizione di natura a fare qualche cosa ( ad esempio pensare, )

Concetto di competenza : il complesso di regole interiorizzate che consente di migliorare le capacità sino ad uno standard (un bimbo è capace di pensare come un filosofo, ma il filosofo è più competente--un pilota d'aereo non è capace di volare ma è competente al volo) .

Alla competenza si può associare il concetto di metodo che

1)in Platone è analitico induttivo (ho un problema e lo risolvo presupponendo un'ipotesi, poi se mi accorgo che c'è un altro problema lo risolvo ..... ) e intuitivo nell'applicare esperienze

2) in Aristotele è sintetico deduttivo e parte dalla conoscenza di principi assoluti e deduce il

possibile (Euclide è certamente un aristotelico) ;

- Le valutazioni agli esami saranno come in tabella

<b>CAPACITA' =</b> disposiz naturale	<b>COMPETENZE =</b> momento analitico per giungere alla determinazione degli standard	<b>CONOSCENZE</b>
√Capacità di dedurre	Quale è il grado di competenza nella capacità di deduzione	Definizione, significato, formule,
√Capacità di espressività	Quale è il grado di competenza nella capacità di espressività	

- Esempi : **Kant** ammette di farsi curare da un clinico ( che studiando la singola malattia è competente in questa) e non da un patologo (studioso delle malattie in generale e dunque capace ma non competente nella singola malattia).
- **Pensiero** : Tutti sono capaci a pensare ma i filosofi hanno un grado di competenza di pensiero elevato (non tutti pensano con lo stesso grado di competenza)
- Un elettricista è capace e competente ma può non avere conoscenze ad esempio di elettrochimica
- Un muto può essere competente, avere conoscenze ma non essere CAPACE di parlare

### prof, Raffaella Manara-

Il "piacere alla matematica " nasce principalmente da due cose : 1) la rassicurazione che si prova quando un conto viene; 2) la sfida intellettuale che viene dall'esercizio .

I due stimoli portano alla CAPACITA' DI PROGETTARE

### Da cosa nasce la capacità a progettare?

- Nasce nel ragazzo dalla fantasia (virtù che per alcuni può essere definita negativamente come fuga dalla realtà mentre è o può diventare quella facoltà più forte della realtà che ci fa capire meglio un simbolo, leggere dentro le cose, conoscere più a fondo la realtà)
- Nasce istintiva perché è più facile progettare che eseguire ( taluni considerano la matematica una scienza per giovani che usano capacità unite alla fantasia, mentre l'anziano sfrutta molto più spesso l'esperienza)
- In uno studente con fantasia progettuale è più difficile insegnare AZIONI ESECUTIVE perché eseguire è una azione che non piace , si diventa razionali quando si capisce a che servono le regole e non quando si conoscono solo le regole

### Che cosa richiedere ai ragazzi per realizzare un progetto ?

- Mettere insieme una serie di variabili : Identificare un obiettivo, contenuto, percorso, risorse, strumenti, risultati e valutazioni, protagonisti, relazione finale ( per presa consapevolezza)

Due esempi prodotti : 1) dimostrare geometricamente un prodotto notevole es  $(a+b)^3$  oppure realizzare una figura geometrica complessa (icosaedro a 20 triangoli

equil o addirittura icosaedro stellato realizzato da un handicappato in 3° media)

### Che cosa c'è di bello in un problema o progetto?

- Fare delle operazioni pensando a che risultato daranno : cioè pensare ad una strategia(azioni consapevoli) che è esattamente il contrario di andare per tentativi(azioni condizionate) come alcuni sostengono quando si sostiene il valore didattico del computer (andare per tentativi è proprio dei bambini e dei disperati che hanno esaurito tutte le strategie)

### Quali sono i passi per comprendere il problema?

1. Analisi e comprensione del testo (ad esempio è diverso dire il cubo della ascissa aumentata di due oppure il cubo della ascissa aumentato di due....) : nel testo esistono dati espliciti e dati impliciti e cioè obiettivi e dati del problema e il problema può essere di determinazione (.di un risultato) o di dimostrazione
2. Ricodificazione del contenuto del testo: si schematizza con fantasia per rappresentare il testo da un contenuto linguistico ad un contesto matematico.
3. Esecuzione : si parte quando si ha in mente una strategia complessiva o uno schema logico completo che deriva o da problemi risolti già conosciuti oppure da tentativi per analogia da problemi conosciuti per adattarli alla nuova situazione

### Che cosa è stato detto sulla strategia di insegnamento al problema?

Bigowsky(pensiero e linguaggio) e Freudenthal sostengono che si deve porre il ragazzo in una ZONA DI SVILUPPO PROSSIMALE e cioè in una zona di consapevolezza che corrisponde ad una fase critica che diventa punto di partenza per affinare uno schema logico che apre alla scoperta (molti studenti pur intelligenti non imparano perché non si aprono all'apprendimento)

Polya ha dedicato un testo fondamentale alla didattica della risoluzione dei problemi: *come risolvere i problemi di matematica*

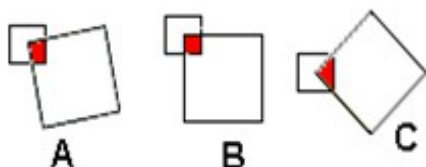
Manara 160499 esempi

### ESEMPI per capire il significato di m.c.m.

1. tre ingranaggi A,B,C, hanno rispettivamente 10-30-50 denti . Di quanti denti devi girare ciascuna ruota affinché la struttura ritorni alla configurazione iniziale?
2. Un giro di pista fa un giro di pista in 14 minuti e un altro in 24 minuti : partono insieme : dopo quanti minuti si trovano al punto di partenza ? quanti giri ha fatto ciascuno di essi? Uno dei due ha doppiato l'altro?
3. Tre motociclisti viaggiano a velocità costante : per un giro il primo impiega 7 minuti, il secondo 12 e il terzo 15 . dopo quanto tempo torneranno insieme al punto di partenza? Quanti giri avrà fatto ciascuno di essi?

### ESEMPI per capire perché si deve abbandonare il formalismo

1. Un quadrato con lati lunghi 20 cm ha un vertice al centro del quadrato con i lati lunghi 10 cm. quanto misura l'area della parte comune?



2. La figura A viene data ai ragazzi: alcuni trasformano la figura in B e C intuendo che l'area della parte comune è 1/4 del quadrato e che è

INVARIANTE per rotazione. Taluni cercano il limite per il quale l'area è invariante o al contrario varia

CONSIDERAZIONI : arrivare ad una definizione è una conquista partire da una definizione è un insuccesso.

### ESEMPI per arrivare a capire il significato dei simboli e a che serve il simbolo

0. Prova a visualizzare con un simbolo un numero di due cifre : spesso lo studente scrive  $xy$  mentre è  $N=10y+x$  . Infatti se  $x=3$ , e  $y=4$ ,  $xy$  non è uguale a 34 ma  $3 \cdot 4=12$
1. Stabilire se è vero o falso che nessun quadrato perfetto termina con la cifra 3 ( si prova prima con i numeri dall'uno al 9 trovando come ultima cifra 1,4,9,6,5,6,9,4,1; per numeri da due cifre elevati al quadrato sarà  $N=(10y+x)^2=100y^2+20xy+x^2$  e dunque (sapendo che  $y^2$  e  $x^2$  non danno mai un numero che finisce per tre e qualsiasi numero ottenuto da  $xy$  moltiplicato per 20 darà un numero pari e quindi mai un numero che finisce per tre) posso concludere che nessun quadrato darà numero che termina per tre.
2. Stabilire se è vero o falso che nessun cubo termina con la cifra 3 (è più complesso, ma si dimostra che a finire per tre sono tutte le cifre possibili)

### ESEMPI per insegnare a generalizzare (insegnando la logica senza il formalismo della logica)

	a	b	c	d	e	f
a						
b	■					
c	■	■				
d	■	■	■			
e	■	■	■	■		
f	■	■	■	■	■	

I cin cin sono  $\frac{6 \times 6}{2} - \frac{6}{2}$   
 e quindi  

$$N = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$$

1. Ad un pranzo di San Silvestro partecipano 6 persone che brindano ognuna con le altre . Quanti cin cin vengono scambiati?
1. Ad un torneo di calcio sono iscritte 10 squadre , ciascuna incontra tutte le altre una volta sola. Quante partite vengono giocate nel torneo?
2. Una rete ferroviaria collega 8 città in modo che ognuno è collegato con tutte le altre e nessuno si trova su un tratto che collega altre due. Quanti sono i tratti ferroviari di quella rete ?(gli studenti diranno che 1,2,3 sono problemi con la stessa risoluzione e quindi si potrà generalizzare con una formula simbolica
3. In un piano sono assegnati 12 punti distinti a tre a tre allineati. Quanti distinti segmenti congiungono a due a due i punti?
4. Scrivere la formula che dice quanti segmenti distinti congiungano n punti di un piano , a tre a tre non allineati
5. Quante sono le diagonali di un poligono convesso (  $n(n-1)/2$  )

Partire dal formalismo si possono ottenere risultati da persone che sono ESECUTORI ma dà risultati instabili : chi si conquista il formalismo attraverso un diverso percorso potrà fare errori ma imparerà e capirà meglio.



Altra serie di esempi:

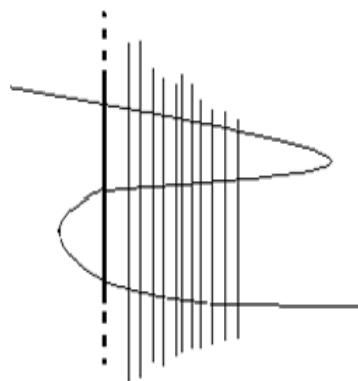
1. Data una scacchiera con 4 righe e quattro colonne immagino di mettere 1 granello nelle righe pari e colonne dispari; 2 granelli nelle righe pari e colonne dispari e viceversa; 3 granelli nelle righe pari e colonne pari : quanti chicchi in tutto nella scacchiera da 4x4? E quanti in una scacchiera da 8x8?

	D	P	D	P
D	1	2	1	2
P	2	3	2	3
D	1	2	1	2
P	2	3	2	3

D dispari  
P pari

Facendo materialmente l'esempio con la scacchiera e i numeri dei chicchi si vede che il modulo sottolineato si ripete sempre eguale, quindi, se in ogni modulo ci sono otto chicchi, nella scacchiera 4x4 ci saranno  $8 \times 4 = 32$  chicchi; mentre nella scacchiera 8x8 ci saranno  $8 \times 16 = 128$  chicchi

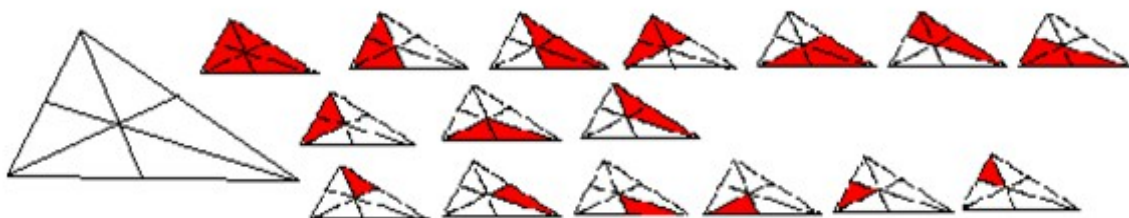
1. La retta r incontra la linea in tre punti dividendola in quattro parti: se 11 rette intersecano la linea, in quante parti viene divisa la linea? e se le rette anziché 11 fossero n?



$$N = 4 + 3(n-1) \quad N = 4 + 3(n-1)$$

### ESEMPI di problema come rottura degli schemi

Esempio 1 : Quanti triangoli ci sono in questa figura?



Esempio 2 : suddividere il quadrato in quattro triangoli isosceli tagliando lungo le diagonali. Disporre i 4 triangoli accostati in modo che i due lati comuni abbiano la stessa lunghezza.

Appunti di filosofia

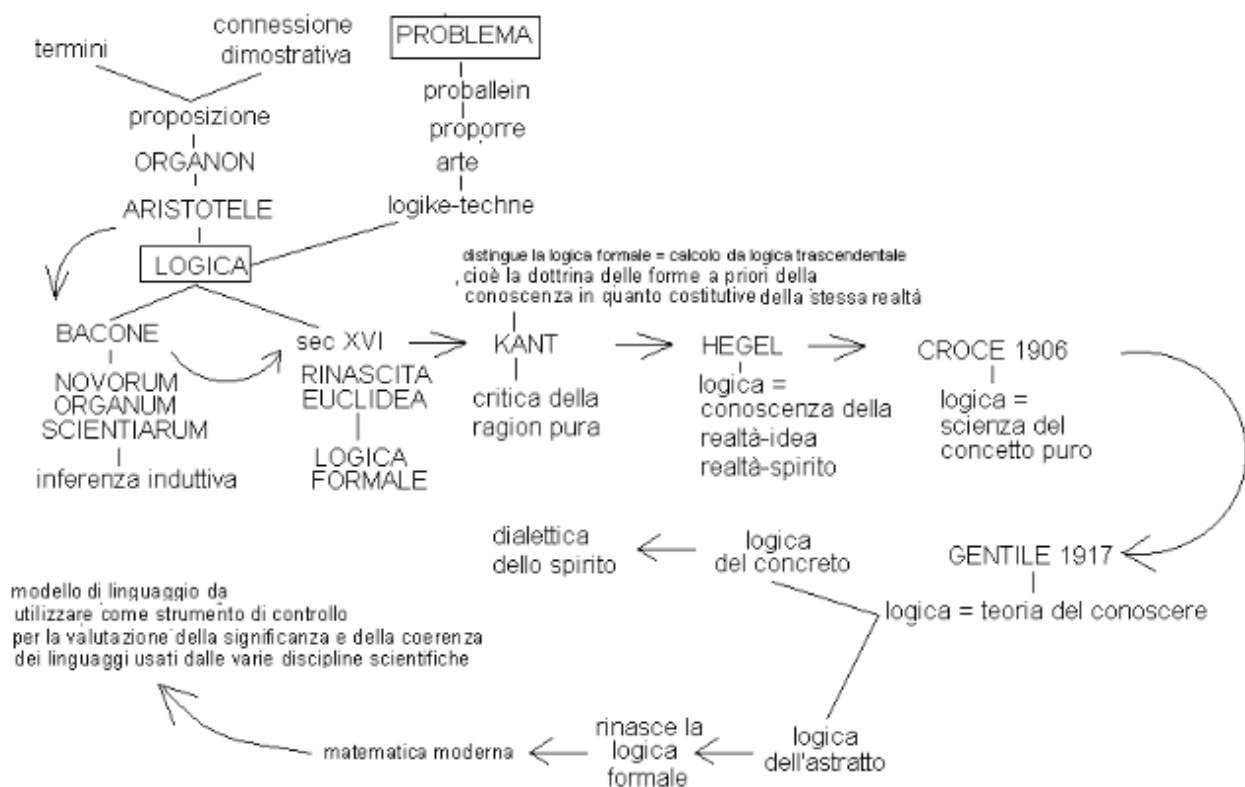
**Relazione e sviluppo concetti di Giorgio Maggi su articolo : problemi e logica presentati dalla prof. Raffaella Manara.**

Ho attentamente letto l'articolo di Raffaella Manara "l'insegnamento e l'apprendimento della matematica : problemi e prospettive " : gli spunti in esso contenuti mi hanno indotto ed accompagnato ad una serie di approfondimenti ( sicuramente elementari visto il mio impegno di neofita) che potrò solo sintetizzare nel rispetto della brevità della elaborazione della relazione richiestami.

## MOTIVAZIONI DELLA SCELTA DEL TESTO

Scelta nata da due obiettivi

1. saperne di più ,alla luce di diverse esperienze didattiche sia alle scuole medie inferiori ( scienze matematiche , fisiche e chimiche) sia alle superiori con chimica generale e tecnologie chimiche.
2. Trovare relazioni tra problemi e logica in matematica e in chimica (scienze che utilizzano entrambe concetti di astrazione per la deduzione ,nell'un caso, o ipotesi deduttiva nell'altro, di elementi di verità formale.



Ho provato a rileggermi ed a sintetizzare come concetti di logica vengano delineandosi diacronicamente in un percorso storico:

Da Socrate ad Aristotele la logica, attraverso la teoria del sillogismo ,si eleva a scienza della dimostrazione; la geometria nasce e parte dai cinque postulati di Euclide così come nelle scienze cosiddette empiriche diventa essenziale la verità delle premesse.

Dunque, la logica matematica, come " scienza che ha per oggetto le strutture deduttive dei linguaggi esatti e in modo particolare della matematica", appartiene alle scienze sperimentali nel momento in cui si passa dall'induzione all'ipotesi deduttiva (matematizzazione dell'esperienza scientifica come condizione di precisione e previsione).

Da Boole a Frege a Russel ( in cui, il cosiddetto assioma dell'infinito, il carattere empirico sembra contrastare con quello analitico del concetto di logica ); da Peano, a Hilbert a Godel il pensiero evolve nella negazione dell'idea secondo cui è possibile dare una fondazione assoluta alla matematica facendo uso di una logica assoluta : dunque molte

logiche come sistemi ipotetici deduttivi verso analisi filosofiche; algebra booleana; teorie degli algoritmi; teorie dei giochi; calcoli dei problemi; elaborazione dei linguaggi ; di modelli e sistemi.

### **PRESENTAZIONE DI ALCUNI CONTENUTI DIDATTICI PRESENTI NEL TESTO:**

Da una articolata e ben più complessa evoluzione del pensiero scaturisce il significato di ragionamento come sinergia di forma ed istinto così come sembra intendere J.H.Newman nella "Grammatica dell'assenso"

Forma ed istinto realizzano un equilibrio quando vi sia consapevolezza del ragionamento : ed allo stesso modo senza consapevolezza , una sequenza anche convincente di ragionamenti perde di consistenza e di significato.

Non credo sia banalizzante l'esempio del clamoroso mio insuccesso in una terza media quando , introdotta l'algebra, dettai in prima battuta, tutte le regole possibili per dedurre con efficacia la risoluzione di una equazione algebrica; ed ancora , in un biennio di scuola superiore quanto sia diseducativo introdurre il concetto di equazione di reazione chimica senza che questo trovi un razionale d'uso nel calcolo stechiometrico ,premessa matematica alla pratica di laboratorio.( Insegnare a ragionare prima di insegnare i ragionamenti è educazione alla logica )

Sinonimo di consapevolezza è coscienza nell'orientarsi quando nel caso specifico risolta una equazione in cui  $a$  rappresenta un numero e  $x$  una incognita , si debba risolvere il problema con  $a$  come incognita dopo che si sia elaborato un percorso di astrazione ; ed egualmente se  $C$  rappresenta una mole di carbonio che sommata ad una mole di ossigeno debba sempre e comunque dare una ed una sola mole di anidride si possa similmente risolvere equazioni diverse elaborando un percorso deduttivo che, attraverso l'uso della valenza, rispetti le leggi di Lavoisier, Proust e Dalton.

Estremamente interessante è il cammino sviluppato nel paragrafo " dal senso comune alla logica" in cui la provocazione di Freudenthal è stimolante soprattutto per un chimico che non ha mai ritenuto la scienza della materia una disciplina meramente induttiva.

Freudenthal dice : " in fisica o in chimica si usa il principio didattico di combattere il senso comune , cacciandolo come si caccia il demonio con esorcismi: le idee del senso comune ostacolano quelle della scienza....."

Eppure nel buio dei profondi antri alchemici nacque l'idea della "grande opera" (ideale umano e filosofico alla trasformazione non solo dell'oro); dalla comune aspirazione alla vita e dalla certezza che questa fosse parte della natura , l'uomo ha usato sin dall'antichità la scienza della materia e degli elementi naturali per elaborare potenti medicinali, alimenti, risorse ; da una dosata quantità di misture chimiche colorate e di intonaci di calcio forse nacque l'intuizione della Cappella Sistina.

Esempi questi di elaborazione chimica del senso comune sia nella direzione del pensiero, della qualità e quantità in una cosiddetta ipotesi deduttiva ( o induzione/ deduzione o controllo deduttivo) che viene rafforzata da una matematizzazione elaborata nel particolare contesto logico.

Il ricercatore procede nel suo lavoro formulando ipotesi e progettando esperimenti che non hanno lo scopo di verificare le ipotesi ma di metterne alla prova la validità ( in sostanza dimostrandone la falsificabilità secondo Popper) confrontandole con l'esperienza oggettiva che penso non sia altro che il cosiddetto senso comune di Freudenthal ovvero l'insieme delle certezze primarie universali . (e ciò non può certo evidenziarsi con la semplice induzione aristotelica, o con la certezza della verifica nella ipotesi induttiva Baconiana, l'interpretazione probabilistica dell'induzione , le teorie di Max Blanck che pretende di

dimostrare il procedimento induttivo e dunque di giustificare deduttivamente l'induzione).

Io non credo che una scienza meramente induttiva possa fare passi in avanti se non ha un obiettivo che gli deriva da un "senso comune" ovvero da un assioma non scritto che potrebbe anche essere una reminiscenza Platonica. A Jung e Freud il compito di decifrare gli aspetti psicologico/filosofici della la ricerca teorica (sostenuta essenzialmente da indizi onirici dal Kekulé) che ha portato alla identificazione della formula ciclica del benzene.

## **SCHEMA DEI CONTENUTI DELL'ARTICOLO**

- L'articolo inizia con una riflessione sul ragionamento e sulla didattica che ad esso si relaziona. Dalla impossibilità di *insegnare i ragionamenti* si può razionalmente pensare di *insegnare a ragionare* solo se si riesce a rendere coscienti gli allievi di un percorso di consapevolezza ordinato e organizzato.

Obiettivo dunque della didattica della logica è : insegnare ad orientarsi nel contenuto e non insegnare il contenuto.

- Nel secondo paragrafo si parte da una definizione di senso comune inteso come insieme delle certezze primarie universali nelle quali radica la ragionevolezza comune : la coscienza e consapevolezza di questi principi insostituibili induce l'uomo a due distinte forme di logica l'una personale e profondamente legata alle abitudini ed alle proprie esperienze , l'altra scientifica che elabora un percorso razionale .Entrambe comunque non possono far capo che al cosiddetto senso comune nel quale esse affondano la loro radice e dalla quale nascono coerenze, ricomprensioni, approfondimenti affinché si possa, partendo da premesse vere, giungere a conseguenze vere.
- Nella " introduzione alla logica " si sottolinea l' importanza di un progetto interdisciplinare in cui si riesca, attraverso approcci diversi ,ad educare l'allievo alla pratica della logica, come superamento o come completamento della razionalità, nella struttura del ragionamento che è fondante in ambito linguistico, matematico e delle diverse discipline per i percorsi didattici che le caratterizzano.
- In " i giudizi : enunciati e predicati", vengono chiariti i tipi di proposizioni e il lessico della logica

proposizioni		esempi
Proposizioni chiuse reali= enunciati	È possibile rispondere vero o falso	Oggi è mercoledì
Proposizioni chiuse nozionali	È possibile rispondere vero o falso	È vero che oggi è mercoledì
Non proposizioni = opinioni, previsioni, esortazioni, imperativi, enunciati	È impossibile rispondere con certezza	Oggi è un brutto mercoledì
Proposizioni aperte= predicati o funzioni	È possibile rispondere vero o	Tizio abita in via Inganni ( vero se

enunciative	falso solo se conosco Tizio	Tizio è ad esempio Roberto)
Quantificazione	Funzione logica che chiarisce a chi si fa riferimento	...per tutti, per qualunque, ...per alcuni, per qualche ,
proposizioni atomiche	Enunciati singoli chiusi o aperti	
Connettivi logici		Non , e, e, o, se...allora

- In " le forme del ragionamento" si illustrano le varie forme di argomentazione classificabili in induzione, abduzione e deduzione.
  1. Induzione : procedimento in cui le premesse partono dal particolare per giungere all'universale e che dai singoli casi deriva ( induce) una legge universale . Il ragionamento induttivo parte da premesse empiriche che formulano, dal ripetersi delle prove, evidenze di previsione di ripetibilità
  2. Abduzione : il procedimento studiato da Pierce presume un passaggio ai limiti della logica che prevede una illazione o un ragionamento ad indizi . Il ragionamento abduittivo non parte da premesse ma dipende essenzialmente dal contesto.
  3. Deduzione : procedimento in cui le premesse partono dall' universale per giungere particolare e ciò ci permette di concludere che ogni conclusione da premesse vere sia necessariamente vera:
  4. Le ragioni dell'uno o dell'altro sui vari approcci metodologici alla scienza si confrontano nel concetto di verità razionale solo se di tipo deduttivo e al contrario di scienza deduttiva come infruttuosa e limitata da una verità preesistente , quasi una tautologia. Le conclusioni non possono che ricercare nella forma logica del ragionamento sia la certezza della deduzione che la creatività della abduzione e l'avventura della pratica induttiva.

## **prof. Valentina Gazzaniga**

### EPISTEMOLOGIA

- EPISTEMOLOGIA DELLA MATEMATICA
  - Linguaggio moderno
  - Costruttivismo radicale
  - Filosofia della matematica
  - Filosofia matematica di Freudental (prof Manara)
- EPISTEMOLOGIA E STORIOGRAFIA
  - Modelli Storiografici
  - Paradigma E Rivoluzione Scientifica(Kun)
  - Giudizio storico (vailati)

- EPISTEMOLOGIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Concetto di definizione

Dalla dimostrazione alla argomentazione

Logica della filosofia e della matematica

### TECNOLOGIE DIDATTICHE VECCHIE

- Esercizi continui su calcolo frazionario o algebrico

### TECNOLOGIE NUOVE/

- Sostituire la "matematica continua" a "Matematica discreta"
- IPERCOLLABORA = IPERTESTO IN RETE con mappe concettuali su epistemologia

Indirizzo <http://www.oppi.mi.it>

- Uso di computer o pocket calculator
- Uso di strumenti soft per lo studio (es dell'algebra) come DERIVE
- Uso di simulazioni in chimica o fisica

### COMPETENZE DELLO STUDENTE

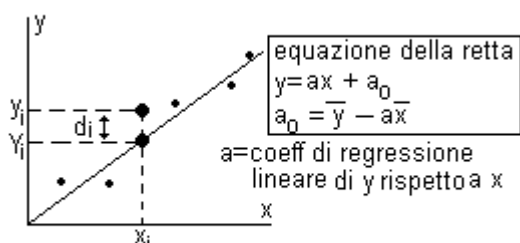
- Analisi e costruzione dei modelli
- Capacità di scelta di strumenti più opportuni
- Capacità di critica dei risultati

### STRUMENTI DI SUPPORTO

- Software (Internet , Intranet)
- Iper testi , Ipermedia
- Tools-à Fogli elettronici , Excel
- Packages per statistica o per algebra(DERIVE)
- Linguaggi di programmazione

### un esempio di calcolo al computer

impostazione del calcolo per il metodo dei minimi quadrati



- 1) fisso l'equazione della retta
- 2) il punto  $A(x_i, Y)$  è teorico
- 3) il punto  $B(x_i, y_i)$  è sperimentale
- 4)  $d$  è lo scarto  $y_i - Y_i = y_i - (ax_i + a_0)$
- 5) elevo al quadrato  $d = d^2$
- 6) sommo i quadrati degli scarti  $H = \sum_{i=1}^n d_i^2$

7) il metodo prevede che si trovino valori di  $a_0$  e  $a$  i rendano minima la funzione  $H \rightarrow \frac{dH}{da_0} = \frac{d \sum_{i=1}^n d_i^2}{da_0} = (y_i - a_0 - ax_i)(-1) = 0$

prof. Fortunato Pesarin

Elementi di calcolo delle probabilità

<u>Probabilità matematica</u> $P(E)$	VALORE MATEMATICO= rapporto tra il numero di casi favorevoli $f$ e casi egualmente possibili $n$ ( $p=f/n$ )
<u>Frequenza relativa dell'evento</u> $F(E)$	VALORE EMPIRICO: rapporto tra il numero di volte che l'evento si è verificato, e il numero di prove effettuate ( più sono le prove effettuate e più ci si avvicina al valore della probabilità )
<u>Eventi incompatibili</u>	Dati due eventi es $E_1$ (viene 4 in un lancio di dado) e $E_2$ (viene 6 in un lancio di dado) è impossibile che si verifichino contemporaneamente.
<u>Eventi compatibili</u>	Dati due eventi , il verificarsi dell'uno non esclude il verificarsi dell'altro , cioè si possono verificare contemporaneamente : esempio $E_1 = >4$ e $E_2 = \text{numerodispari}$
<u>Eventi complementari</u>	Dati due eventi ,l'uno esclude l'altro ma può uscire l'uno o l'altro esempio : $E_1 = \text{pari}$ , $E_2 = \text{dispari}$  La somma delle probabilità di due eventi complementari è sempre uguale a 1
<u>Grafo ad albero</u>	Grafo per valutare i diversi casi possibili  <b>Esempio</b> : calcolare la probabilità che esca evento $E$ (testa,testa) (probabilità = $1/4 = \text{probabilità che esca testa} = 1/2$ moltiplicato la probabilità che esca croce = $1/2$ )  $1/2 \times 1/2 = 1/4$  Testa testa  Testa croce  Croce testa  Croce testa  <b>Esempio</b> :calcolare l'evento più probabile : (rosso,rosso),(rosso verde) (verde verde)  Una scatola con due rosse e una verde  Una scatola con due rosse e due verdi

	Rosso rosso



Rosso rosso

Rosso verde

Rosso verde

Rosso rosso

Rosso rosso

Rosso verde

Rosso verde

Verde rosso

Verde rosso

Verde verde

Verde verde

evento (rosso,rosso) = casi favorevoli 4,casi possibili 12  $P(E) = 4/12 = 1/3$

La probabilità che esca (rosso rosso) =  $2/3 \times 2/4 = 4/12$

evento(verde verde)=casi favorevoli2,casi possibili 12

$P(E) = 2/12 = 1/6$

La probabilità che esca (verde verde) =  $1/3 \times 1/3 = 1/9$

Evento (rosso,verde)indip dall'ordine;favor6,possib12

$P(E) = 6/12 = 1/2$

La probabilità che esca (rosso verde) =  $1 - 1/3 - 1/9 = 5/9$

simboli matematici

$\cup$  unione  $\supset$  contiene propriamente  $\supseteq$  contiene  $\cap$  intersezione  $\subseteq$  è contenuto  $\not\subseteq$  non è contenuto  
 $\subset$  è contenuto propriamente  $\exists$  esiste  $\exists!$  esiste ed è unico | dato, condizionato  
 $\times$  prodotto cartesiano  $\forall$  per ogni  $\propto$  proporzionale  $\rightarrow$  tendente a  $\neg$  non  
 $\in$  appartiene  $\notin$  non appartiene  $\emptyset$  insieme vuoto  $\neq$  diverso  $\approx$  circa uguale  
 $\Rightarrow$  implica  $\Leftrightarrow$  se e solo se (doppia implicazione)  $f$  funzione  $\varepsilon$  che soddisfa a

## prof. Fortunato Pesarin

Probabilità e/o statistica fanno parte delle DISCIPLINE FORMALI (le discipline EMPIRICHE sono chimica, fisica....)

- DEFINIZIONE DI PROBABILITA' : premesso che definire un concetto può essere limitante o fuorviante (quando si scopre che la definizione è sbagliata o migliorabile), una definizione è :

### PROBABILITA' = DISCIPLINA DELL'INCERTEZZA.

- Come spiegare il concetto di Probabilità :
  - disciplina che adotta assiomi, teoremi, principi generali
  - disciplina nata per affrontare in modo razionale alcuni problemi che hanno in comune forme di incertezza (dubbi, carenze, di vari tipi ,logico, etico, scientifico.....)
- Come sintetizzare il significato di INCERTEZZA: MOTORE CHE INNESCA LA CURIOSITA' e può essere di due tipi (per l'esempio uso un modo paradigmatico dell'incertezza o un esempio di incertezza : il lancio di una moneta)
  - INCERTEZZA IMMANENTE E INEVITABILE = butto una moneta e non so se sarà testa o croce.
  - INCERTEZZA PER MANCATA CONOSCENZA = ieri è stata buttata una moneta però io non so se è veuta testa o croce.
- ESPERIMENTO ALEATORIO : può essere il lancio di una moneta, un esame, un viaggio, un possibile evento con più esiti.
- Elementi di un esperimento aleatorio ( carattere symbol  $\dot{\bar{E}} \# e$  )
  - $e$  = ESPERIMENTO ALEATORIO ( esempio lancio di una moneta)
  - $A$  = EVENTO ALEATORIO
  - $W$  = SPAZIO CAMPIONARIO (insieme di esiti esempio=2 per testa o croce, oppure 90 per il lotto; )
  - $w$ = ATOMO (o evento elementare ad esempio 1 lancio o 2 lanci ecc)

se ne deduce un'altra definizione di probabilità:

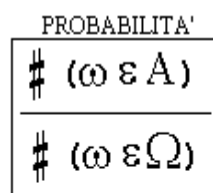
### PROBABILITA' = INCERTEZZA COLLEGATA CON UN ESPERIMENTO ALEATORIO IN CUI LO SPAZIO CAMPIONARIO ASSOCIATO $W$ SIA BEN DEFINITO.,

- Casi in cui in un esperimento aleatorio  $W$  non sia ben definito :
  - leggi della natura ( attenzione l'incertezza è nostra e non della natura)
  - affermazioni (ad esempio : la probabilità che esistano gli extraterrestri...)
- Dunque la probabilità  $P$  dell'evento aleatorio  $A$  si scrive come funzione  $P(A)$ . La proposizione cioè l'enunciato numerico di eventi si scrive  $Pr(A)$  e più precisamente  $Pr(A, e, W)$  e cioè la probabilità che avvenga l'evento  $A$  nell'esperimento e con spazio campione  $W$  di possibili esiti.

- $P(A) \geq 0$  cioè la probabilità che si verifichi l'evento A è sicuramente maggiore o uguale a zero, mentre
- $P(W) = 1$  cioè la probabilità che si realizzi uno dei possibili eventi è sempre uguale a 1 (la probabilità che si realizzino tutte e due le possibilità :testa o croce al lancio di una moneta è sicuramente
- $P(A \dot{\cup} B) = P(A) + P(B)$  cioè , se A e B non sono compatibili, la probabilità di A unito (È) a B è uguale alla probabilità di A + la probabilità di B. ( per alcuni problemi di fisica si rileva che  $P(A \dot{\cup} B) < P(A) + P(B)$ )
- Convenzione utile : fissati i seguenti simboli e quando tutti gli omega sono equiprobabili allora vale la relazione : (formula A)

- # = n° eventi aleatori  
cardinalità
- $\omega$  = evento elementare
- $\mathcal{E}$  = ...che soddisfa a .....
- A = evento aleatori
- $\Omega$  = possibili esiti (spazio campionario)

cardinalità = potenza di un insieme ovvero caratteristica che prescinde dalla natura e dall'ordinamento dei suoi elementi



ad esempio nel tiro dei dadi probabilità significa :

per un solo tiro di dadi # = 1 ,l'evento elementare  $\omega$  che soddisfa ( $\mathcal{E}$ ) la probabilità che si verifichi l'evento aleatorio A ( cioè ad esempio che esca = 5 ) che esca un numero scelto tra le possibilità che vanno da 1 a 6 = 1

FRATTO

per un solo tiro di dadi # = 1 ,l'evento elementare  $\omega$  che soddisfa ( $\mathcal{E}$ ) la probabilità che si verifichino tutti i possibili esiti  $\Omega$  (cioè 1,2,3,4,5,6) = 6

=  $\frac{1}{6}$

Esempio 1 = Nel caso di verificare la probabilità che gettando un dado esca un numero pari : gli eventi aleatori pari nei sei numeri sono  $A = 3$  ( cioè 2,4,6) e i possibili esiti  $W = 6$  : la probabilità sarà  $3/6$

Esempio 2 =Gioco con due dadi quale è la probabilità che esca la coppia 6,6?Certo che per ogni giocata corrispondono  $6^2 = 36$  casi egualmente possibili un solo caso è favorevole alla possibilità che esca la coppia 6,6 e dunque la probabilità sarà  $1/36$  ( $f(A)/f(W)$ )

Esempio 3 = Gioco con due dadi quale è la probabilità che esca la coppia 2,3 ? poiché si può verificare che esca 2,3 oppure 3,2 e cioè che l'evento aleatorio A sia 2 , avrò che la probabilità sarà  $2/36 = 1/18$

DIVERSE DEFINIZIONI DI PROBABILITA' :

- CLASSICA : misura del grado di incertezza dell'evento aleatorio A in relazione ai possibili esiti W.
- FREQUENTISTA o metodo statistico : fissato un numero elevato di casi con esito A , la probabilità che questo si verifichi è data dal numero di A fratto il numero totale degli eventi , cioè  $P(A) = \text{casi con esito A} / \text{casi totali}$
- SOGGETTIVISTA : per tutti quegli eventi unici come una partita di calcio che per sua natura è irripetibile alle stesse condizioni ( si realizza con tecniche di simulazione dello stesso evento alle stesse condizioni )

11/12/1998

CALCOLO DELLA PROBABILITA'

- Supponendo di impostare il calcolo in distribuzioni molto complesse (es con**

grandezze dell'ordine di  $100^{100}$  ) si può simulare l'esperimento su **calcolatore** (che ovviamente conferma ma non scopre la teoria);  
 il calcolatore usa un **linguaggio macchina** che a sua volta usa funzioni **pseudorandom** (i primi calcolatori realizzavano 32.000 numeri casuali che non sono totalmente indipendenti infatti simulando il lancio di una moneta scopro che alla lunga il calcolatore si allontana dando valori diversi dalla teoria ).  
 Scopo di alcuni programmi è quello di rendere indipendenti la produzione di numeri casuali esempio

```
RNU(U)
X FOR=U
X=(X*$/£ + 1.897)*RND(1)
X=X-INT(X)
NEXT
```

facendo girare questa operazione ad esempio 1 miliardo di volte , i valori hanno un comportamento statistico molto vicino a quello che si avrebbe in modo meccanico ( ad esempio estraendo numeri da un urna), dopo una successione di dati elevata (  $10^{15+3} * 2^{15}$  ) si ha ciclicità.

(un esempio potrebbe essere calcolare la probabilità che del concime possa far bene alla germinazione o allo sviluppo della parte legnosa o allo sviluppo delle foglie : dispongo di 20 vasi con terriccio e 20 vasi con terriccio e concime e in questi 40 vasi semino valutando i parametri che mi interessano : in pratica l'unico mezzo disponibile è quello di vedere come si comportano le permutazioni di tutti i dati (cioè  $40! = 40$  fattoriale cioè  $1*2*3*4*... *40$ ) e ciò a mano è evidentemente impossibile :DUNQUE :si usa il calcolatore!!)

Si può dunque affermare l'assioma (affermazione superfluo a dimostrare perché palesemente vera)che in questi casi si parla di **PROBABILITA' CONDIZIONATA O CONDIZIONALE**.

**Ora immagino di valutare quale sia la probabilità di pescare un numero qualsiasi ( ad esempio il n° 4) alla seconda estrazione, in un'urna contenente 90 palline (posso usare un sistema sintetico oppure analitico )**

1° modo = la probabilità che esca il 4 (anche se è alla seconda estrazione) su 90 palline è  $=1/90$

2° modo =

indico con  $e_1$  = evento di estrazione della 1° pallina

.....  $e_2$  = evento successivo di estrazione della 2° pallina

fisso gli spazi campionari (cioè gli:eventi possibili) per i due eventi

per l'evento  $e_1$  lo spazio campionario sarà

$$W_1 = \{ 1,2,3,4.....N\}$$

per l'evento  $e_2$  lo spazio campionario sarà(manca il numero x estratto nel1° evento)

$$W_{2,1} = \{ 1,2,3,4...x-1,x+1.....N\}$$

ora se ricavo lo spazio campionario per l'esperimento totale e dispongo tutto in matrice (matrice è una tabella così disposta :

	risultato 1	risultato 2	risultato 3	risultato .	risultato N-1	risultato N
Evento1	1,1	1,2	1,3	.....	1,N-1	1,N



**B = n°dispari = { 3,6} con probabilità PB =2/6 =1/3**

P(A|B) =probabilità di A condizionato a B =1/2

P(B|A) =probabilità di B condizionato a A =1/3

esempio: immagino un'urna con 8 palline :

A = { 1,2,3,4,} ; B = { 2,4,6,8} ; C = { 3,6}

P(A) = 4/8=1/2 ; P(B) = 4/8=1/2 ; P(C) = 2/8=1/4

P(AB) = (A e B hanno in comune 2,4)= 2/8 =1/4

P(AC) = (A e C hanno in comune 3)= 1/8

P(CB) = (B e C hanno in comune 6)= 1/8

P(A|B) = (A e B hanno in comune 2,4) =2/4

P(A|C) = (A e C hanno in comune 3)= 1/2

P(C|B) = (B e C hanno in comune 6)= 1/4

gli eventi sono a 2 a 2 indipendenti

P(ABC)= 0 ^1 P(A) . P(B) . P(C)

esempio: immagino di lanciare una moneta tre volte (o di estrarre due palline da un'urna con un reinserimento )

fissato testa =1 ; croce = 2 : x= prodotto cartesiano  
e ho le seguenti possibilità

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} 111 \\ 112 \\ 121 \\ 122 \\ 211 \\ 212 \\ 221 \\ 222 \end{matrix}$$

fissato come A il sottoinsieme 111,112,121,122 ,mi chiedo che probabilità ha il sottoinsieme A?

P(A) =4/8 = P(A1) cioè probabilità al 1° lancio

P(1,x,y) sarà : 4/8 infatti su 8 possibilità se ne possono verificare 4 e cioè :  
111,112,121,122

P(2,1,x) sarà : 2/8 infatti su 8 possibilità se ne possono verificare 2 e cioè : 211,212

P(x,1,1) sarà : 2/8 infatti su 8 possibilità se ne possono verificare 2 e cioè : 211,212

P(2,1,1) sarà : 1/8 infatti su 8 possibilità se ne possono verificare 1 e cioè : 211, in quest'ultimo caso 2 al primo evento,1 al secondo evento e 1 al terzo evento sono indipendenti.

Può , a questo punto sembrare convincente la definizione di Vehn sulla Probabilità che sostiene che " Probabilità sia la misura della frequenza di esperimenti indipendenti " mentre non si tratta altro che di una tautologia.

**fissato un evento B e intersecchiamolo con i da 1 a k,**



$$B = B \cap \left[ \bigcup_{i=1}^k A_i \right] = \bigcup_{i=1}^k A_i \cap B$$

$$P(B) = P[A_i | B] = \sum P[A_i | B] = \sum P[A_i | B] = \sum P[A_i | B] \cdot P(B)$$

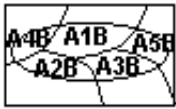
$$= \sum P[B | A_i] \cdot P(A_i) \text{ e semplificando } \sum P[A_i | B] = 1$$

uno spazio campionario è sempre

A1 unito a A2 unito....a Ak se Ai intersecato Aj=0

cioè : W = A1ÈA2ÈA3...ÈAk se AiÇAj =0

si avrà :



cioè la somma delle probabilità condizionate è uguale a 1 (B diventa spazio campionario condizionato) e la relazione è :

**FORMULA DELLA PROBABILITA' TOTALI**

$$P(B) = \sum P[B|A_i] \cdot P(A_i)$$

**prof. Silio Rigatti Luchini**

## **STATISTICA**

Statistica è un metodo per fare sintesi di fenomeni e informazioni all'interno del metodo scientifico ovvero di sintetizzare grandi masse di informazioni ( un semplice esempio può essere: è più facile individuare la città di provenienza di una semplice cartolina con la chiesa di S.Pietro che di 100 cartoline rappresentante ognuna in modo diverso alcuni particolari della chiesa di S.Pietro)

Nel metodo scientifico la statistica si pone ad un certo livello:



## **PAROLE CHIAVE IN STATISTICA**

**ASTRAZIONE** : Il procedimento ideale col quale si separa un aspetto o una qualità da un oggetto individuale per ricavarne un concetto universale; anche il risultato di tale processo.

**UNITA' STATISTICA**

**POPOLAZIONE STATISTICA**

**CAMPIONE**

CARATTERI(variabili, fenomeni...)

CARATTERISTICHE COSTANTI

MODALITA'

Se devo fare una indagine devo individuare UNITA' STATISTICHE a cui chiedere informazioni (genitori, prof, alunni ), l'insieme delle unità costituisce la POPOLAZIONE STATISTICA. (nel censimento la popolazione è di 55.000.000 di persone e le unità sono gli abitanti italiani e non; nell'indagine su patologie del mal di testa, la popolazione è infinita perché si dovrebbe considerare non solo la popolazione italiana ma mondiale e tutti quanti hanno avuto un mal di testa ieri, quanti oggi, quanti hanno denunciato all'ospedale un forte mal di testa e quanti hanno avuto lievi dolori...)

Se non riesco ad osservare tutta la popolazione ne osservo una parte , scelgo un CAMPIONE della popolazione stessa.

Ma cosa chiederò al campione ? chiederò CARATTERI O VARIABILI O FENOMENI (non chiederò quante teste hai? Perché non è una variabile ) e ne riceverò risposte chiamate MODALITA'.( ad esempio carattere : sesso -à modalità :maschio)che possono essere QUALITATIVE (sesso maschile, professione insegnante) e QUANTITATIVE ( quanto pesi? 100 ,96,87 kg)

SCALE				
	QUALITATIVA	QUANTITATIVA	QUALITATIVA	QUANTITATIVA
RELAZIONE	SCONNESSA	ORDINALE	INTERVALLATA	RAPPORTO
A=B	+	+	+	+
A <sup>1</sup> A	+	+	+	+
A < A		+	+	+
A > A		+	+	+
A - B			+	+
A / B				+

SCONNESSA: la modalità A costituisce un insieme privo di ordinamento (nazionalità sesso gruppo)

ORDINALE: le modalità A sono insieme ordinate ( es titolo di studio,,grado militare,

INTERVALLATE : le modalità appartengono a numeri reali e l'origine è convenzionale

RAPPORTO: l'origine è naturale (peso- lunghezza)

### CONSIDERAZIONI SULLA STATISTICA

L'istruzione non si preoccupa di illustrare la natura della statistica e spesso ci si ferma al mezzo pollo di Trilussa senza spiegarne e discuterne il valore informativo (contrastando la tendenza alla riattribuzione)

### TIPI DI STATISTICA

STATISTICA DESCRITTIVA: riferita alla popolazione



STATISTICA INFERENZIALE: riferita a campione riguardante la popolazione (provo 100 fiammiferi su una quantità di 10000 per valutarne l'accensione)

POPOLAZIONE CAMPIONARIA: popolazione da cui è estratto il campione

POPOLAZIONE OBIETTIVO: popolazione nei cui riguardi voglio avere informazioni

Se da una popolazione estraggo un campione, questo interferirà sulla popolazione (come? ad esempio se devo fare un'indagine sui malati di cuore, il campione sarà sempre diverso dalla popolazione perché sarà composto da persone visitate in ospedale e quindi con patologie più gravi di persone che pur ammalate di cuore non lo sanno oppure hanno una patologia leggera); dunque da una POPOLAZIONE CAMPIONARIA si estrae un campione e ottengo una indagine riferita ad una popolazione obiettivo

### TABELLE E GRAFICI IN STATISTICA

1) esempio studio i cambi delle monete giornaliero

giorni	dollaro	sterlina
1	1560	2568
2	1570	2600
3	1565	2610

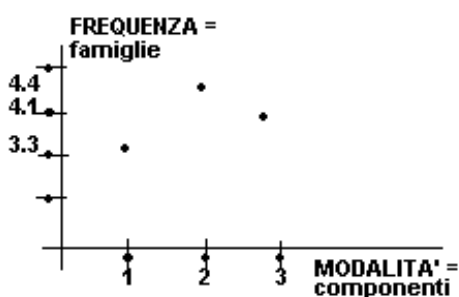
Posso fare una tabella che sintetizzi maggiormente i dati

giorni	sterlina
2	>2600
1	<2600

I giorni così scritti sono: MODALITA' ARBITRALI (più semplici ma più individuabili)

2) esempio di VARIABILE DISCRETA:

MODALITA' = n° componenti per famiglia	FREQUENZA = N° famiglie
1	3.300.000
2	4.430.000
3	4.140.000



3) Esempio di VARIABILE CONTINUA (in cui la % delle famiglie è cumulata)

MODALITA' = redditi

FREQUENZA= famiglie cumulate

Fino a 4

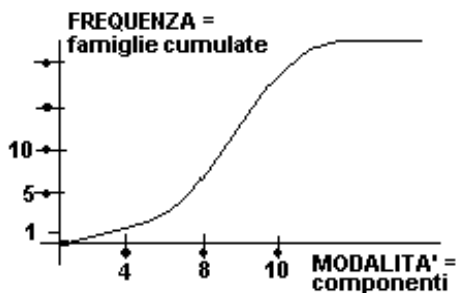
1,8

Fino a 8

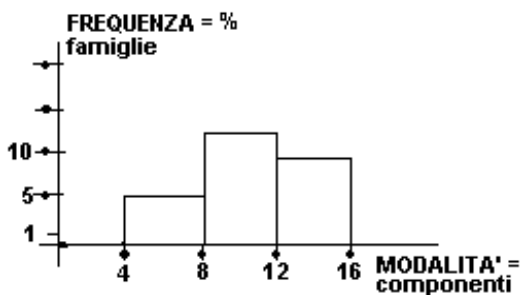
5,2

Fino a 10

10.1

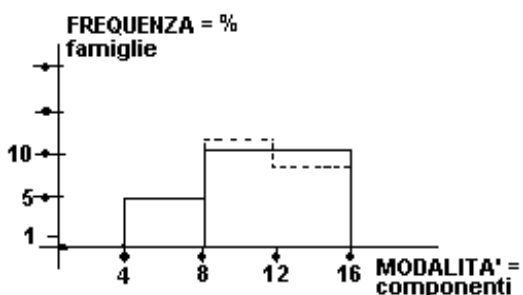


4) esempio di ISTOGRAMMA



5) esempio di ISTOGRAMMA in cui le modalità siano

divise in classi con intervalli diversi (in questo caso le aree saranno proporzionali e se aumenta la classe in ascissa diminuirà la frequenza in ordinate)



6) altri esempi sono grafici a piramide in cui maschi e femmina sono divisi per età

### DIFFERENZA TRA MEDIA ARITMETICA E MEDIA GEOMETRICA

#### ESEMPIO 1 per media aritmetica e geometrica

La differenza tra le due medie si può sintetizzare con un esempio :due contadini vengono espropriati di un terreno : il primo coltiva pioppi lungo il fosso e il secondo coltiva mais all'interno del campo.

Al primo interesserà essere risarcito con un campo della lunghezza uguale al campo espropriato ( $l = l \cdot l / 2$ ) mentre al secondo interessa l'area ( $l = \sqrt{l \cdot l}$ )

Il primo contadino pretenderà un campo con media aritmetica dei lati mentre il secondo contadino pretenderà un campo con media geometrica

#### ESEMPIO 2 per media armonica

Ci sono 4 capannoni con un certo numero di operai che con le macchine a disposizione , impiegano un certo tempo per fare un buco. Preparo una tabella siffatta:

capannone	Operai = $f_i$	Tempo $t_i$	Inverso di $t_i$	Quanti buchi
		impiegato da	:quanti buchi	fanno gli

		una macchina per fare il buco ,in secondi	fa un operaio in un secondo	operai del capannone in 1 secondo :ti . fi
A	5	10	1/10	1/10 x 5
B	3	20	1/20	1/20 x 3
C	6	18	1/18	1/18 x 6
D	8	13	1/13	1/13 x 8
totale	22operai		$\frac{1}{t}=1,602$	

Se dovessi calcolare la media aritmetica del tempo impiegato per fare un buco in tutta la fabbrica otterrei  $(10+20+18+13)/4 = 15,25$  . Poiché in ogni capannone esiste una situazione diversa, gli operai e le macchine sono diverse , si propone la MEDIA ARMONICA di Ghisini che è tempo medio =  $n^\circ \text{ operai} / \frac{1}{t} = 22 / 1,602 = 13,7$  secondi

### ESEMPIO 3 : altri tipi di medie = MODA E MEDIANA

MODA indica la modalità più comune e diffusa (manca la relazione  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(M_1, M_2, M_3, \dots, M_n)$ )

MEDIANA indica la modalità centrale

### ESEMPIO 4

Considero una serie "n" di voti per le classi A e B e li valuto :

classe	Voti $x_i$	Media M
A	23, 24, 25	24
B	20, 24, 28	24

La media non dice niente sulle distribuzioni di voti , ma si può calcolare la variabilità rispetto alla media

$(x_i - M)$  indica la variabilità che può essere + o -

$(x_i - M)^2$  indica lo scarto ed è sempre positivo

$\frac{1}{n} \sum (x_i - M)^2 = s^2$  indica la varianza (al valore medio cioè  $x_i = M$  la varianza = 0 )

ritornando ai voti  $s_A^2 = \frac{1}{3} \sum (x_i - M)^2 = \frac{1+0+1}{3} = 0,67$  ;  $s_B^2 = \frac{1}{3} \sum (x_i - M)^2 = \frac{16+0+16}{3} = 10,67$  dunque risulta che A ha una variabilità più bassa di B

oppure meglio anziché usare  $s^2$  si può usare  $s$  e quindi  $s_A = \sqrt{0,67} = 0,82$   $s_B = \sqrt{10,67} = 3,27$  e si può dire che la variabilità del gruppo A ha uno scarto rilevato di 0,82 e cioè nel gruppo A i punteggi differiscono in media di 0,82 punti rispetto alla media aritmetica.

### PROPRIETA' FORMALE DELLA MEDIA ARITMETICA

$$\sum (x_i - M) = 0$$

$\sum (x_i - M)^2$  DEVE ESSERE MINIMA ( per qualunque valore di M diverso dalla media il valore aumenta ....dunque se devo pagare in bomboloni uno scarto è meglio che calcoli M il valore dei bomboloni perchè per un maggior o minor valore di M spenderai più bomboloni)

## CONSIDERAZIONI SULLA STATISTICA

L'istruzione non si preoccupa di illustrare la natura della statistica e spesso ci si ferma al mezzo pollo di Trilussa senza spiegarne e discuterne il valore informativo (contrastando la tendenza alla riattribuzione)

Un altro esempio è quello di chi per propria tranquillità e sicurezza si porta una bomba in aereo perché è statisticamente improbabile che si possano trovare due dirottatori con bomba su uno stesso aereo.

### prof. Alessandro Antonietti

La serie delle lezioni (costituite da spiegazioni legate a attività e a discussione successiva che porterà a sistematizzazione e verifica) si articolerà sviluppando quattro concetti:

- Rappresentazione della Matematica
- Apprendimento
- Strategie
- Concetti

Nella prima lezione dunque si svilupperà il concetto di Rappresentazione della matematica ovvero quanto lo studente e l'insegnante valutano e considerano la materia. (La rappresentazione della matematica seguirà una sequenza logica di momenti anche di tipo emotivo che partiranno da ASSOCIAZIONI, per seguire con MAPPE, STORIE personali di esperienze scolastiche e non, sino ad arrivare alla vera e propria CONCEZIONE della matematica da parte dell'insegnante.

- Studente: Diversi sono i modelli di approccio alla materia e spesso la matematica è considerata una dote, non la si può migliorare al punto che molti pensano che un esercizio viene solo a chi "è portato" e se un esercizio non viene è inutile ritentare.
- Insegnante: studi fatti sostengono che ne esistono di tre tipi con concezioni diverse:
  1. CONCEZIONE ASSOLUTISTICA E PLATONICA: matematica come valore universale, assoluto, certo, indipendente dai valori, modelli perfetti ed immutabili.
  2. CONCEZIONE FALLIBILISTA O DI PROBLEM SOLVING: la materia si sviluppa attraverso congetture, tentativi, falsificazioni, incertezze, scopre, inventa, attività generativa che produce soluzioni.
  3. CONCEZIONE STRUMENTALISTICA: la matematica è un insieme di regole e procedure da applicare, sequenza di passaggi da seguire

Da queste concezioni contrapposte nasce la VISIONE DELL'INSEGNAMENTO

1. VISIONE FORMALE : matematica fissa, esente da ambiguità, insieme di regole e formule, l'insegnante fornisce dimostrazioni e fa memorizzare procedure, la soluzione arriva attraverso un'unica via,
2. VISIONE INFORMALE : si propone allo studente di trovare le soluzioni, tollera che lo studente sbaglia e ricerchi l'errore, matematica creativa estetica, euristica, scoperta per tentativi ed errori attraverso una molteplicità di approcci.

Comportamento del insegnante che usa approccio costruzionista: scopo è valutare le proprie capacità e mettere in discussione il proprio modo di operare

1° momento = atteggiamento : ascolta, dialoga, è disponibile a interagire, invita a far proposte

2° momento = cerca di capire, opinioni, convinzioni, significati, fa domande a stimolo, usa analogie, fornisce controesempi, cerca sinonimi

3° momento cerca di mettere in crisi

4° momento = verifica

esempi fatti per discutere sul significato pratico del modo di affrontare costruz.

**1° esempio:** una nave durante la tempesta si salva per merito della bravura di tre marinai: a questi il capitano promette di dare in premio il contenuto in monete (contenente circa da 200 a 300 monete) di un forziere. Durante la notte un primo marinaio si alza e, poco fiducioso delle promesse del capitano, si prende la terza parte delle monete e accorgendosi che ne avanzava una la butta, e ritorna a dormire; il secondo marinaio si sveglia e scettico sulle promesse del capitano divide in tre parti le monete e ne prende una parte, e accorgendosi che ve ne era una di troppo la butta, ritorna a dormire e svegliatosi il terzo marinaio ripete l'operazione buttando una moneta. Alla mattina il capitano convoca i tre marinai e divide in tre parti le monete (rimaste...) e ne distribuisce una parte ad ognuno accorgendosi che manca una moneta la tiene per sé. Quante erano le monete inizialmente?

Si può partire subito con i conti oppure riflettere ad esempio se il problema è aritmetico, algebrico, geometrico, trigonometrico.....ci si può chiedere se vi è solo contenuto matematico oppure se è contestualizzato, ecc...si deve partire dalla fine o dall'inizio?....

$X=3a+1$	a	a	a	
$2a=3b+1$	b	b	b	
$2b=3c+1$	c	c	c	
$2c=3d+1$	d	d	d	

$$X = 3a + 1 = 3((3b + 1)/2) + 1 = 3((3(3(3d + 1)/2 + 1)/2 + 1)/2) + 1$$

**2° esempio :** una lumaca vuol salire un muro alto 5 metri, sale tre metri e scende di due ogni giorno: quanti giorni impiega ?? (sbaglia chi dice 5 perché è al primo giorno  $+3-2=+1$ ; al secondo giorno  $+1+3-2=+2$ ; al terzo giorno  $+2+3$  è arrivata ai 5 metri!!!!)

**3° esempio:** 24 uomini mangiano 24 panini in 24 giorni. Quanti panini mangiano 12 uomini in 12 giorni? Vien da dire 12 invece 12 uomini in 24 giorni mangeranno 12 panini e in 12 giorni la metà

**4° esempio :** un mattone pesa un kilo + mezzo mattone. Quanto pesa il mattone? 2 kg

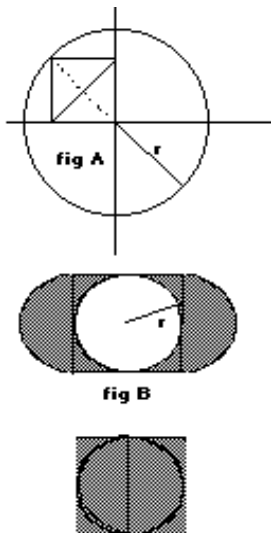
**5° esempio :** 4 catene con tre anelli: voglio unirle e rompere un anello costa 2500 mentre saldarlo costa 2000 il costo sarà ad una prima valutazione:  $2500 \times 4 + 2000 \times 4 = 18.000$ ; si può spendere di meno spezzando una delle quattro catene in tre pezzi e risaldandoli nelle catene rimaste  $2500 \times 3 + 2000 \times 3 = 13.500$

**6° esempio :** ho tre carte E K 4 7: se su un lato c'è una vocale, sull'altro lato c'è un numero pari, quali delle quattro carte? E (VERO c'è la vocale), 4 (NON VERO se c'è numero pari non è detto che sul lato opposto ci sia vocale), 7 (VERO se c'è una dispari potrebbe anche esserci dietro una consonante, nessuno lo vieta); k è una consonante e quindi non si sa che c'è dietro

**7° esempio** calcolare la regola di una tripletta come ad esempio 2,4,6: si continua cambiando il numero fino a capire che la regola può essere "numeri crescenti"

**8° esempio :** calcolare la diagonale del quadrato conoscendo il raggio del cerchio in figura

A e l'area della figura tratteggiata sapendo l'area del cerchio in figura B



si scopre che nella fig A il raggio è anche la diagonale e nella fig B l'area della figura tratteggiata è l'area del quadrato.

**9° esempio** : ho 35 cammelli e ne voglio lasciare  $1/2$  a luigi,  $1/3$  a antonio e  $1/9$  a Paolo; come faccio : mi faccio prestare un cammello  $35+1 = 36$  che è divisibile per 2, per 3 e per 9 ottenendo rispettivamente 18, 12,4 la cui somma dà 34 e dunque faccio una buona divisione e mi rimangono anche due cammelli

(l'errore stà nel fatto che  $1/2 + 1/3 + 1/9$  non raggiunge l'unità)

Spesso l'errore nasce da una tendenza spontanea, esempi di misconcezioni e di script che non sono congruenti con la matematica scolastica ma legati a esperienze diverse.

### ESEMPIO 1

Luigi ha 32 anni, lavora in ospedale , ama andare all'estero, ha viaggiato in Europa e in Asia

Domanda : metti in ordine le seguenti osservazioni seconda la più probabile:

1. è un medico scapolo
- 2) è un medico scapolo che ama viaggiare all'estero,
- 3) è un avvocato che ama viaggiare all'estero, è un avvocato scapolo

(siccome sono più i medici scapoli dei medici scapoli che amano viaggiare all'estero, e poiché in ospedale sono sempre più i medici degli avvocati allora.....)

### ESEMPIO 2

quale delle due asserzioni è più probabile?

La figlia ha gli occhi blu se la madre ha gli occhi blu

La madre ha gli occhi blu se la figlia ha gli occhi blu

(equiprobabili)

### ESEMPIO 3

1)Durante una epidemia di asiatica (stima 600 vittime)il Direttore della ASL può scegliere due opportunità (A o B)

Con A si salvano 200 persone

Con B ho  $1/3$  di probabilità che si salvino 600 persone e  $2/3$  che non se ne salvi nessuna

2)Durante una epidemia di asiatica (stima 600 vittime) un diverso Direttore della ASL può

scegliere due opportunità (C o D)

Con C muoiono 400 persone

Con D c'è 1/3 di possibilità che nessuno muoia e 2/3 che muoiano tutti

CONSIDERAZIONI : in 1) la domanda viene espressa in positivo e tendenzialmente tra A e B si sceglie A; in 2) la domanda espressa in negativo induce a rispondere D anche se matematicamente C e D hanno la stessa probabilità.

#### **ESEMPIO 4**

La statistica dice che il tumore maligno per nodulo al seno è dell'1%: la mammografia spesso dà falsi positivi e in particolare può dare test positivo sia per tumore maligno (80%) che per tumore benigno (90%). La probabilità che il test positivo sia effettivamente maligno quale sarà ?

Risposta : la maggior parte dei medici ha risposto 75% mentre la vera probabilità è 7-8%

#### **ESEMPIO 5**

Nascondo un premio dietro tre carte : chiedo all'osservatore di indicare una carta che toglierò, chiedo nuovamente all'osservatore se vuole cambiare la carta : è più probabile vincere dicendo di sì o di no ? Equiprobabile

#### **ESEMPIO 6**

Al mare sulla spiaggia ci sono più donne o donne abbronzate? Spesso si risponde erroneamente: "più donne abbronzate!"

#### **ESEMPIO 7**

E' più probabile che una coppia abbia i figli in successione MMM FFF oppure MFFMFM?. Equiprobabile

#### **ESEMPIO 8**

Un gelato costa 60 centesimi e un bimbo ha una moneta da 1/4 di dollaro(25centesimi), un dime(10centesimi) e 2 penny(da 1 centesimo il penny) . Quanto gli manca per comprare il gelato? Risposta : il secchione dirà : 23 penny mentre altri diranno " un'altra moneta da 1/4 di dollaro e il resto di ritorno"

#### **ESEMPIO 9**

In commercio spesso si usava contare usando le dozzine perché? Forse perché 10 ha solo due divisori(5,2) mentre 12 ne ha 4 (6,3,4,2)

#### **ESEMPIO 10**

Se è vero che è assolutamente minima la probabilità che su uno stesso aereo ci siano due terroristi con una bomba, allora è anche vero che per viaggiare in sicurezza si deve altrettanto assolutamente portarsi in valigia la bomba.

#### **ESEMPIO 11**

Problema : Un peso cade dalla torre alta  $s = 100$  metri impiegando  $t = 5$  secondi : calcolare la velocità finale

RISOLUZIONE :  $V = s / t = 100 / 5 = 20$  m/sec

DISCUSSIONE : quanto c'è di vero e di falso nella risoluzione ?

RISULTATO della discussione : il problema è valido dal punto di vista matematico ma non dal punto di vista fisico infatti se  $g = 9,8 \text{ m/sec}^2 = s/t^2$  allora verifico che gettando un peso da una torre di 100 metri questo impiegherà  $t = \sqrt{100/9,8} = 3,19$  sec

## LAVORO DI GRUPPO

Si valutino le risposte date da un gruppo di studenti e si sintetizzino in un pensiero organico:

Primo gruppo di risposte: l'**apprendimento** secondo gli studenti può essere affrontato da un punto di vista metacognitivo, ragionamento, ricerca delle difficoltà, volontà, strade diverse, e sociocognitivo (aspetto sociale) e contestualmente del pensiero.

Secondo gruppo di risposte: la capacità di saper **leggere** influisce sulla capacità di risolvere i problemi, leggere è un tutt'uno con capire, saper interpretare, saper riflettere: lettura come input e elaborazione.

### 1 modelli mentali

Livelli nella mente (vecchia concezione)	La mente traduce in sequenza di simboli qualunque conoscenza
Livelli nella mente (P.J.Laird)	tre livelli: proposizioni, modelli mentali, immagini mentali
proposizioni	Rappresentazioni astratte, discrete e digitali, sintassi arbitraria, senza contatto con la realtà
Modelli mentali o organizzazione cognitiva strutturata	Rappresentazioni analogiche della realtà che nascono dal ragionamento e che non sono necessariamente legate alla logica razionale (l'uomo anche colto non segue per ragionare tavole di verità, ma è influenzato da fattori cognitivi di ordine diverso). paragonati a paradigmi (=archetipi, schemi di interpretazione) dall'epistemologo Kuhn, i modelli sono difficilmente abbandonabili perché riescono a spiegare soggettivamente i fenomeni
	Esistono due definizioni: quella di Laird e quella di Piaget
Modello mentale di Laird	Rappresentazione della realtà che assumono le informazioni sulle quali noi facciamo un ragionamento senza ricorrere alla logica. (microteorie)
Modello mentale o logica mentale di Piaget	Ai dati si applicano regole logiche e attraverso sillogismi si prosegue nella deduzione
Immagini mentali	Rappresentazioni coerenti e integrate di scene in cui tutti gli elementi sono disponibili simultaneamente.
Teorie ingenue, spontanee	Modelli mentali o microteorie o teorie alternative che affiorano in modo spontaneo dall'esperienza personale dall'apparenza e non da dati scientifici



Evoluzione del concetto di "trasformazione storica" nella elementare media inferiore e superiore	<p>Nei bambini : trasformazione = accrescimento continuo</p> <p>Nei ragazzi : trasformazione storica prevede ristrutturazione e cambiamenti culturali e di prospettiva</p>
Mis concezioni	Le idee primitive degli studenti non derivano da informazioni travisate, ma da un modello mentale inadeguato pur legato ad idee coerenti
Conceptual change E come attivarlo?	<p>Passaggio dello studente da un modello di ordine inferiore a uno di ordine superiore</p> <p>Il cambiamento concettuale attivo si attiva conoscendo il modello ingenuo dello studente( questi non è un vaso da riempire ma un soggetto con un radicato modello mentale da smontare e ricostruire- spesso l'insuccesso dell'operazione si vede nella ingenuità di certi adulti)</p>
In che modo attivarlo?	Con 1)riflessione metacognitiva,2)discussione sul metodo(fonti) e termini(definizioni,concetti..),3)strumenti informatici

## 2 strategie controllo dell'apprendimento, strategie

metacognizione	opportunità per superare modalità tradizionali nell'apprendimento e strumento per intervenire in casi particolari di difficoltà : CONSAPEVOLEZZA, CONOSCENZA E CONTROLLO della propria mente mentre ricorda e ragiona.
Difficoltà di apprendimento nel normale e andicap	Scarsa consapevolezza delle strategie di pensiero (metacognizione), scarsa organizzazione (non mancanza di abilità di base ma incapacità di attivare risorse cognitive)
Impostazione disciplinare	Contenuti, concetti, metodi, strumenti
Impostazione metacognitiva	Viene preso in esame il momento stesso del pensare : attività mentale come processo e non come prodotto
Processo di problem	Processo metacognitivo che prevede :

<p>solving--criteri per risolvere un problema e per valutarne un processo metacognitivo</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1)ripete informazioni date e definisce le condizioni di partenza</li> <li>2)dichiara assunti impliciti cioè difende una tesi o argomento implicito</li> <li>3)organizza i dati</li> <li>4)organizza le informazioni, individua le più importanti</li> <li>5)definisce obiettivo</li> <li>6)fa domande e fissa priorità</li> <li>7)individua strategie</li> <li>8) pianifica l'esecuzione</li> <li>9)formula ipotesi, previsioni</li> </ol> <p>identifica feedback cioè effetto retroattivo</p>
<p>Interventi</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) rilevare comportamenti abituali scolastici</li> <li>2) Valutare il contesto (compiti , modi di fare), comportamento in classe, metodi di studio, conoscenza di sé</li> <li>3) valutare strategie conosciute dall'alunno e descriverne altre come definire obiettivi, prevedere tempi e difficoltà, fissare punti e parole chiave,</li> <li>4)Si insegnano le procedure efficaci,</li> </ol>
<p>apprendimento autoregolato (self regulated learning)</p> <p>= maggior consapevolezza e opinione circa gli obiettivi</p> <p>(non necessariamente legata all'intelligenza)</p>	<p>Si articola in due autoregolazioni : cognitiva e motivazionale (Bokaerts 1996)</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1)autoregolazione cognitiva si articola in tre componenti <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Conoscitiva (formule, regole...)</li> <li>2. Strategica (schemi, sequenze operative,...)</li> <li>3. Degli obiettivi(capacità di elaborare piani, messa in pratica e risultati)</li> </ol> </li> <li>2)autoregolazione motivazionale <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Conoscitiva ( in matematica sono, o non sono bravo...)</li> <li>2. Strategica(emozioni negative, desiderio di imparare...)</li> </ol> </li> </ol>

### 3. Degli obiettivi (intenzioni e comportamenti)

#### 3 aspetti pragmatici

Learning by doing = imparare facendo

Strategia che si oppone alla lezione frontale e che segue la affermazione "se ascolto dimentico, se vedo capisco, se faccio imparo"

Modello dell'arco riflesso=

PERCEZIONE, PENSIERO, AZIONE

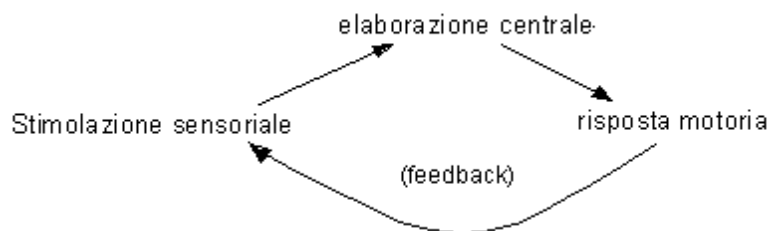
Modello che spiega il learning by doing

1° ipotesi (indirizzo comportamentista) modello lineare

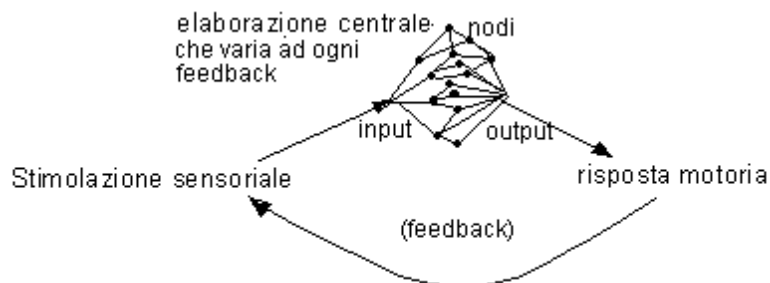
**Stimolazione sensoriale----->elaborazione centrale---->risposta motoria**

2° ipotesi (cognitivismo) modello circolare dove la risposta stimola (feedback)

(input e output)



3° ipotesi (connessionismo) la mente è una rete di nodi



Bruner

Le competenze protolinguistiche della comunicazione del bambino nascono dall' **azione**, scopi e risultati; l'azione rimane anche

nell'adulto.

impronta pragmatico motoria

Script, piani, schemi pragmatici, modelli situazionali....

Pensiero e azione sono indistinti, l'azione non segue il processo dell'arco ma influenza e organizza mentalmente l'esperienza

**Scrip**  
(copione sceneggiatura),  
**frame**  
(incorniciatura)

Forme schematiche di conoscenza legate a abitudini o norme sociali(se devo sintetizzare la descrizione di una situazione ,istintivamente invento passaggi che non sono nel racconto per rendere più logica la sequenza )

Già le prime esperienze del bambino sono inscritte in script (preparare la pappa...) e quindi della realtà il bimbo coglie azioni e non oggetti.

Convinzioni dello studente

1. le azioni dell'individuo sono più importanti dell'influenza delle strutture sociali ( rivoluz industriale nasce da esigenze del singolo e non dal contesto...)
2. le comunicazioni rapidissime nel mondo antico

Narrative

Sequenza di eventi che è anche sottofondo, clima, orientamento generale, somma di più script

Forme di pensiero secondo Bruner

Paradigmatico: riferimento a strutture e processi logici con articolazione sincronica dell'esperienza (esempio tema tipo "lista della spesa", mappa, )

narrativo: riferimento a processi narrativi con articolazione diacronica dell'esperienza (esempio tema personale con spunti e intuizioni e legato a un prototipo o canovaccio o copione )un esempio è la storia che viene ridotta dagli studenti a unica narrativa mentre dovrebbe essere studiata sulla base di narrative conflittuali

Costruzione sociale della conoscenza

- secondo Piaget la conoscenza parte da un meccanismo interno e il sociale e fisico sono simili
- secondo nuove teorie la conoscenza avviene entro rapporti sociali che ne determinano le caratteristiche

#### 4credenze sulla mente

Metacognizione

opportunità per superare modalità tradizionali nell'apprendimento e strumento per intervenire in casi particolari di difficoltà : CONSAPEVOLEZZA, CONOSCENZA E CONTROLLO per

vedi cap VII

1. affrontare un compito(vedi)
2. conoscerne gli aspetti
3. conoscere gli oggetti delle credenze e processi

mentali

Metamemoria	Flavell avanza l'ipotesi che le conoscenze che si hanno sui meccanismi mnesici incidano sul loro funzionamento.
Meccanismi mnesici	Processi di attenzione, emozioni, immaginazione, soluzione di problemi, memoria, ragionamento...
Questioni legate a meccanismi mnesici della metacognizione	<ul style="list-style-type: none"><li>• Contenuti, stimoli, materiali</li><li>• Contesto, ambiente, situazione</li><li>• Processo mentale attivato all'esecuzione di un compito</li><li>• Altre strategie di pensiero per quel compito</li></ul>
Metacognizione nel :	<p><b><u>Affrontare compito</u></b> :</p> <p>Memorizzare, risolvere un problema, comprendere, riassumere</p> <p><b><u>Conoscere gli aspetti</u></b> :</p> <p>Somiglianza, facilità, tempo necessario, carico di lavoro (impegno, attenzione), punti cruciali, vantaggi, limiti, risorse, fonti di errore, senso di sicurezza, capacità, apprendibilità, gradimento, abitudine</p> <p><b><u>Conoscere gli oggetti delle credenze e processi mentali</u></b>:</p> <p>Stimolo, Contesto, Processo attivato, strategie alternative</p>
Livelli di metacognizione	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Opinioni generiche---immagine analitica di elementi esterni---immagine analitica dei processi mentali---</li><li>2. Convinzioni generiche-specifiche-coerenti-sistematiche-emotive</li></ol>
Esempi di evoluzione metacognitiva	<p><u>Disattenzione</u>: il bambino incolpa cause esterne, l'adolescente riconosce la personale mancanza di interesse</p> <p><u>Emozioni negative</u> : il bambino rifiuta la condizione fisica legata all'emozione, mentre l'adolescente usa strategie come pensare a esperienze piacevoli.</p>

mnemotecnica	Strategia di memorizzazione con metodi: 1) dei loci; 2)casellario a rime;3) fonetico
loci	Informazioni inserite in un luogo o percorso virtuale
Casellario a rime	Parole che fanno rima : uno il pruno, due il bue,...
fonetico	Si associa una cifra a un numero da 0 a 9 (se d=1 ; dado = 11)
Difficoltà nell'apprendimento	Premesso che il bambino sviluppa precocemente convinzioni e teorie e quindi è riluttante a rinunciare ad esse : la difficoltà del bambino non è nella comprensione della regola ma nella comprensione del modo con cui la regola deve essere acquisita.
Difficoltà nell'apprendimento della scienza	Lo studente pensa: 1)che la scienza serva per giungere alla verità assoluta (raccolta di dati), e non ne accetta il carattere strumentale, ipotetico, fallibile e rivedibile (il chimico che scopre la formula segreta raccoglie evidenze per trasformare in certezze le proprie convinzioni = epistemologia confermazionista)  2)che sia difficile distinguere sperimentazione, leggi, ipotesi e modelli; la differenza tra teoria e evidenza (esempio prof. Di Bella); interpretare fatti alla luce di teorie
Difficoltà nell'apprendimento della storia	La storia è ciò che è scritto sul libro (immagine dogmatica) e nei filmati, mentre manca consapevolezza della natura problematica, relativistica e creativa del lavoro storico.  La comprensione della storia è legata per gli studenti elementari al possesso di grande quantità di dati mentre per studenti delle superiori ad una visione più articolata con motivazioni, aspirazioni...

### **5competenza metacognitiva**

**METACOGNIZIONE** opportunità per superare modalità tradizionali nell'apprendimento e strumento per intervenire in casi particolari di difficoltà : **CONSAPEVOLEZZA, CONOSCENZA E CONTROLLO** della propria mente mentre ricorda e ragiona.

ESEMPIO DI METACOGNIZIONE : 1)alcuni alunni affrontano il problema provando, riprovando e sbagliando,2) altri seguono un metodo sequenziale ( step by step) sottolineando le parole chiave e svolgendo con ordine i calcoli, 3) altri ancora prima di scrivere pensano a quanto l'insegnante ha spiegato (cognizione)e riflettono con prudenza sui criteri ,concezioni, obiettivi che l'insegnante ha usato per preparare il problema .(metacognizione)

METACOGNIZIONE E INTELLIGENZA : L'intelligenza dell'individuo non dipende dalle abilità nell'eseguire operazioni mentali, per risolvere un compito, ma dalla capacità di riflessione e di controllo in prospettiva alle mete indicate.

PIAGET : l'autore sostiene che il culmine della crescita intellettuale sia la capacità di ragionamento astratto ; alcuni psicologi superano tale limite immaginando che l'evoluzione mentale del pensiero logico formale porti a una riflessione più profonda (tappa più elevata)

Folk psychology Area di indagine in psicologia che tenta di ricostruire ciò che si crede sul funzionamento della mente mettendo in corrispondenza psicologia ingenua con psicologia scientifica e empirica (esempio concetto di intelligenza tra categorie di soggetti e concetto scientifico oggettivo)

Teoria della mente (172) 1978 Premack e Woodruff Tendenza a capire la sistematizzazione dell'immagine complessiva nella mente e cioè come e soprattutto quando il bambino comincia a riflettere ( comincia ad attribuire stati mentali ) su fenomeni quali intenzioni, desideri, emozioni, percezioni, conoscenze , e rileva la differenza tra sapere e credere, sbagliarsi e mentire, conoscere e indovinare, essere e sembrare

Vedi "verbi mentali"

Come si sviluppa la teoria della mente

- 1° Ipotesi= È innata nel bambino
- 2° Ipotesi= Nel bambino si sviluppa la

consapevolezza dei propri stati mentali-(simula lo stato e immagina le conseguenze che ne deriverebbero)

- 3° Ipotesi = capacità del pensiero astratto (per una realtà inosservabile)
- 4° Ipotesi = il bambino assimila schemi, copioni, procedure di vita e le applica : ipotesi sociale

Verbi mentali

Sapere , credere, ricordare, desiderare...sono legati a stati mentali

Inferenze

Processi logici in cui date due o più premesse è possibile una conclusione ; le inferenze possono essere legate a verbi mentali  
( Luca spera che le vacanze inizino il 20 : iniziano veramente o no? Si chiederà agli alunni di sviluppare inferenze)

Giudicare le affermazioni

È saper separare il CONTENUTO SEMANTICO (ciò che vien detto) da MODALITÀ LOCUTORIA(atteggiamento o stato mentale di colui che fa l'affermazione)

"sei stato distratto" (contenuto = affermazione )(modalità locutoria = rimprovero che induce reazione e rifiuto ) ; separando contenuto da modalità si può motivare o discutere l'affermazione pur restando arrabbiati!

(Giorgio Maggi)12/03/99

Il docente di matematica che usa approccio costruzionista:

- indaga sulle conoscenze dello studente per elaborare un metodo di insegnamento
- Sa che le convinzioni dello studente possono essere arricchite con l'insegnamento "costruttivo" e non autoritario.
- Sa che lo studente ha la forte certezza delle proprie convinzioni, queste possono essere migliorate solo fornendo dati e stimolando l'alunno con il dubbio.
- il conflitto cognitivo o lo stimolo al dubbio nello studente si predispone 1) conoscendo il suo pensiero facendo domande, test, 2)fornendo dati personali , dati estratti da pubblicazioni o libri, 3) valutando e discutendo idee legate all'argomento, 4) usando analogie per sostenere il concetto, 5) dimostrare il nuovo e più complesso pensiero rispetto alla rappresentazione ingenua iniziale ,mostrando quali sono le competenze raggiungibili

**1° Esempio: classe prima media: diario delle lezioni sulle frazioni**

1. domande agli allievi sul significato di frazione appreso alla scuola elementare



RISPOSTE: la maggior parte della classe associa la frazione alla torta senza saper approfondire, alcuni sostengono che si capisce meglio il problema usando torte quadrate come il tiramisù che non torte rotonde classiche, solo due alunne sanno associare alla nozione di frazione il concetto di parte, un alunno in modo originale ricorda l'analogia fatta dalla maestra che indicava per frazione un numero separato con un "coltellino" da un numero sottostante.

2. ripropongo la torta e opportune suddivisioni in fette

RISPOSTE: buona parte della classe è convinta del significato di  $1/2$  e lo associa a metà torta, mentre pochi sanno spiegare concretamente il significato di  $3/5$

ELABORAZIONE: la classe inventa e riconosce esempi frazionari sulla torta e scrive le frazioni corrispondenti

3. Valuto se è stato compreso il concetto relativo di frazione proponendo il problema: è meglio una fetta di torta fragola o due fette di torta di crema?

RISPOSTA: tutti rispondono preferendo le due fette.

ELABORAZIONE: disegno alla lavagna le due torte: la torta di fragola divisa in due fette e la torta di crema divisa in 12 fette, e ripeto la domanda precedente.

RISPOSTA: solo alcuni capiscono immediatamente e rispondono, nasce una discussione; si continua rifacendo esempi anche più complessi alla cui soluzione partecipano tutti

4. Chiedo una valutazione sul significato di frazione con una serie di domande :

- In quali esempi nella vita di tutti i giorni trovi le frazioni ? (ore, note musicali, i voti in alcune scuole...)
- Qual è il miglior modo di operare con le frazioni? Saper fare operazioni
- Come fare le operazioni con le frazioni ? ad esempio somma di un mezzo più un mezzo o prodotto di un mezzo per un mezzo

RISPOSTA: la maggior parte degli allievi istintivamente elabora la somma mentre il prodotto è compreso con più difficoltà e il risultato di un quarto diventa chiaro quando risulterà chiara la regola che impone che il prodotto tra frazioni sia prodotto dei numeratori fratto il prodotto dei denominatori.

- In che modo spiegare che esistono frazioni chiamate improprie come ad esempio cinque terzi?

RISPOSTA: Alcuni allievi tentano di spiegare la frazione impropria utilizzando l'analogia della torta :Taglio una torta in tre parti e ne prendo tre , taglio un'altra torta in tre parti e ne prendo due, la somma dei tre terzi della prima torta e dei due terzi della seconda darà cinque terzi : la deduzione risulta complessa per i più , necessita di una discussione e di altri esempi.

- Provo ora a definire la procedura per operare una SOMMA tra frazioni complesse

ELABORAZIONE : (di tipo associazionista/ comportamentista )definendo il concetto di minimo comune denominatore che nasce da minimo comune multiplo tra i denominatori delle frazioni da sommare e procedure successive : la procedura potrebbe essere estesa secondo "il più bravo della classe " anche a un comune denominatore che non sia solo il minimo comun denominatore (la discussione che ne segue è dispersiva per alcuni)

- Un'altra operazione importante è quella che prende il nome di SEMPLIFICAZIONE e il cui concetto per analogia può essere verificato e compreso discutendo sulle differenze tra una torta divisa per cinque decimi e una torta divisa per un mezzo

ELABORAZIONE : definendo il concetto semplificazione come procedura per ridurre a minimi termini una frazione che possa essere divisa per un massimo comun divisore : esercizi successivi mi fanno sperare che alcuni studenti giungano alla conclusione che, mentre frazioni complesse possano essere semplificate utilizzando meccanicamente il MCD , altre frazioni possano semplificarsi dividendo denominatore per numeratore o viceversa oppure dividendo numeratore e denominatore per un divisore comune riconosciuto in modo istintivo

## 2° Esempio/diario : classe seconda media: problema sulle proporzioni

PROBLEMA : due numeri stanno in rapporto tra di loro come  $5/7$  e la loro somma è 20 . Calcolare i due numeri

( gli studenti conoscono, dalle lezioni precedenti, le proprietà delle proporzioni, strategie di trasformazione di una sequenza logica lessicale in sequenza matematica , obiettivi delle proporzioni , significato del risultato e formule per ricavare l'incognita)

1) : la maggior parte degli studenti non riesce a trasformare la descrizione letterale del problema in sintesi matematica : le precedenti convinzioni legate a sequenze semplici inducono i più a immaginare la soluzione come una semplice somma tra frazioni.

2) : alla domanda : "quale è stato l'argomento svolto nei giorni scorsi?" la maggior parte della classe capisce che il problema potrà riguardare le proporzioni ma, solo a pochi, viene immediato spiegare il perché facendo riferimento alla parola "rapporto" .

3) difficoltà ulteriori si hanno nel trasformare il senso letterale del problema in sintesi matematica: alla domanda " come scrivere matematicamente : due numeri stanno in rapporto tra di loro come  $5/7$ " la classe non risponde (l'utilizzo di analogie sostituendo a numeri ,nomi di studenti e alla frazione le altezze degli studenti , raggiunge il primo risultato che verrà confermato da analogie ulteriori e esercizi )

4) la classe ora riconosce che il problema può essere impostato così :

$$a : b = 5 : 7 \text{ e } (a + b) = 20$$

( gli studenti accettano divertiti che che un problema così scritto sarebbe riconosciuto e forse risolto anche da un cinese o un russo che non conoscendo l'italiano non saprebbero certamente capire il problema nella forma letterale)

5) e allora come si risolve il problema ??? quale obiettivo??? Quali mezzi per raggiungerlo??

Forse bisogna applicare le regole !

Dal gruppetto dei migliori arriva la prima intuizione : proprietà del comporre???

Compito del 18.2.99 di Giorgio Maggi

Provare ad esprimere la propria concezione della matematica indicando 5 capacità per imparare la matematica: (es. la memoria per la platonica, creativa per problem solving, rapidità di esecuzione per il tipo strumentale)

Uno studente per imparare la matematica deve:

- essere capace di curiosità verso la novità
- deve essere abituato alle regole ed educato a valori
- essere critico verso la regola finché questa non venga dimostrata
- essere costante nell'impegno pratico che segue la comprensione teorica
- portato alla applicazione pratica di quanto acquisito

La mia concezione della Matematica ha, come modello di base, l'idea che questa sia una forma di linguaggio con leggi ben precise e certe e in armonia tra loro: tali principi possono evolvere sino a trasformarsi in un insieme di metodi tali da chiarire e gestire le modificazioni e le dinamiche che sono proprie della complessità in continua espansione e permettere l'elaborazione di procedure nuove e adeguate. Il metodo matematico di tipo analitico completerà il metodo empirico coniugando certezza con creatività e stimolando quest'ultima. Esempio :

1)Matematica applicata alla chimica può elaborare metodi più o meno complessi di elaborazione di dati analitici : un buona elaborazione stechiometrica di un processo analitico rende immediato il risultato dell'analisi.

2)Matematica applicata alla pianificazione territoriale urbanistica può favorire la comprensione statistica di alcuni aspetti del territorio e stimolare una politica di riequilibrio e recupero.

Compito: leggere da pag 20 a 25 : (Antonietti) sintetizzo

Concezioni dell'apprendimento

1. concezione pragmatico funzionale(superficiale)
2. concezione trasformativa o costruttiva

concezione pragmatico funzionale-

1. Conoscere per accrescere le proprie conoscenze
2. Memorizzare

concezione assolutistica della conoscenza

3. Riprodurre informazioni

concezione trasformativa o costruttiva

1. applicare
2. comprendere
3. evolvere

concezione relativistica

Concezioni collegate alla storia e al contesto

1)Giappone (rote learner= studente meccanico)): autorità, obbedienza, cooperazione , valore al gruppo

2)America: fiducia tolleranza creatività, valore all'individuo

3)Cina: memorizzazione e comprensione non sono antitetiche ma simultanee (memorizzazione con comprensione e non meccanica)

Dove avviene l'apprendimento?

A scuola, nella vita quotidiana, in occasioni di scambio e viaggio, in particolari eventi personali

Cosa si acquisisce con

Competenza culturale, capacità pratica, principi di

l'apprendimento?	vita
Con chi avviene l'apprendimento?	Con l'esperto, con il collega alla pari, da soli
Quali procedure sono ritenute importanti dagli studenti per l'apprendimento	Ascoltare storie anche personali, seguire le spiegazioni, lavorare in gruppo, esperienze di role playing, uso di cartoni animati, uso di immagini
framework	"Progetto" che ricostruisce le informazioni e le collega all'esperienza e che nel bambino è mediato da immagini e storie : dunque disegni ,narrazioni, colloqui, questionari , possono aiutare all'apprendimento
Immagine dell'apprendimento nella scuola materna	Accordo tra insegnanti e bambini per : 1)stati affettivi, 2)criteri di lavoro (collaborare, restare centrati sul compito...), 3)importanza alla disciplina  Disaccordo : i bambini non vedono le loro attività come educative ma come acquisizione di informazioni e competenze
Capitolo II da pag 37 a 69	
modello	Un modello sottende un'immagine di un processo di apprendimento ; ne esistono diversi tipi
comportamentismo	Teoria ( USA/Inghilterra anni 1913-1950) che studia gli aspetti esteriori osservabili della attività mentale e che esclude la coscienza : lo studio si ritiene possa essere misurato matematicamente
<b>Modello dell'associazione /comportamentista</b>  (propone informazioni e fa domande in sequenza)	Ogni elemento è connesso all'altro sulla base di catene associative spazio/temporali e di causa effetto : il processo di apprendimento è la somma di apprendimenti parziali  Esperienze al computer con istruzione programmata lineare di Skinner e ramificata di Crowder rilevate da Norman
Modello dell'associazione con istruzione programmata lineare di Skinner	Domande(frame) in successione con eventuale domanda di recupero sino alla domanda finale

Modello dell'associazione con istruzione programmata ramificata di Crowder Domande seguono un particolare iter apprenditivo diramandosi in varie direzioni

**Modello del campo** (propone informazioni) Ogni elemento si dispone in modo da formare strutture globali in un campo: apprendimento inteso dalla psicologia della gestalt(=forma)

psicologia della gestalt (Germania 1900) carattere olistico dei fenomeni mentali; le esperienze mentali sono totalità che vanno studiate insieme perché il significato di ogni singolo elemento è dato dalla sua collocazione , dall'insieme in cui è inserito, dai collegamenti e rapporti tra di essi..

**Modello della scoperta** (propone esplorazioni) Modello in cui è lo stesso studente a ricercare significati generali che sotto la guida dell'insegnante compie un percorso di esplorazione : lo studente diventa attivo (un esempio è lo studio del territorio attraverso documentazione).Ciò produrrebbe maggior interesse nella scuola, gusto della ricerca, migliore comprensione, favorirebbe il metodo di studio, aumenterebbe la gratificazione. Come fare ? 1) fornire dati iniziali,2)ascoltare domande,3)invitare a ricercare elementi comuni e leggi,4)verificare

Critiche al metodo: perdita di tempo e "rielaborazione dell'ovvio" cioè riscoperta di principi che si potevano facilmente presentare in pochi minuti.

Vedi Devey e Popper, Bruner

Attivismo pedagogico di Devey Il soggetto è impegnato nel processo di adattamento all'ambiente e quindi è stimolato a capire e sperimentare

Epistemologia evoluzionista di Karl Popper Il soggetto arriva alla conoscenza attraverso prove ed errori secondo una dinamica naturale alla cieca(evoluzionismo passivo ) o secondo cambiamenti intenzionali ed voluti (evoluzionismo attivo)

Bruner La scoperta , sia essa di uno scolaro che di uno scienziato, è sempre un operazione di riordinamento o di trasformazione di fatti...---dal caso paradigmatico come un esperimento concreto si può in modo induttivo giungere a fare

considerazioni nuove ,simmetrie , differenze ecc.

### **Modello costruzionista**

(propone un conflitto cognitivo cioè fa dubitare l'alunno sulle sue conoscenze)

(si forniscono dati e si fanno domande)

Dà per scontato che l'alunno ha un modello di pensiero che gli permette di dare una spiegazione ad un evento nuovo senza che per lui vi sia nulla da scoprire. Dunque non indurre scoperte ma convincere ad abbandonare la distorsione di una propria convinzione e quindi sarà fondamentale raccogliere informazioni sulle personali ed ingenuie idee dello studente(rappresentazione ingenua), prospettare attività in cui essa viene messa indubbio, e successivamente verificare l'operazione.

Si forniscono dati, si valutano le idee legate all'argomento, si possono fare analogie (ad esempio cuore/pompa)

Altro esempio : concetto di rapporto tra malato e medico e auto rotta e meccanico : l'alunno riesce a capire il rapporto se ha sufficienti conoscenze sui 4 elementi, ma non ha necessità di capire il rapporto in astratto.

### **Sintesi dei modelli**

1) modello comportamentista associativo del vuoto- pieno: l'individuo è inizialmente vuoto e va riempito di conoscenze, alunno passivo; es nuovo= ipertesti; Immagine = grafi ad albero con associazioni,

2) modello **psicologico della gestalt**: l'individuo è già "riempito" di principi (innati)utili a organizzare l'apprendimento dei contenuti; alunno attivo; Immagine = il punto è l'istante dell'apprendimento e il cerchio è il campo cognitivo

3) modello della **scoperta**: l'individuo si avvicina al processo apprenditivo utilizzando esperienze e conoscenze precedenti ma non innate. Alunno attivo; Immagine = linea ascendente

4) modello costruttivistico: l'individuo è già "riempito" di modelli e teorie ingenuie della realtà , alunno attivo perché deve aggiornare le sue convinzioni; Immagine = linea a spirale

## **Orientamenti sull'apprendimento**

1. L'apprendimento non è in relazione all'acquisizione di capacità mentali ma al modo di rappresentare e di trasformazione delle conoscenze (situated learning)
2. L'apprendimento è uno scambio tra adulti e coetanei (social cognition) (cooperative learning) : prospettiva sociale
3. L'apprendimento non è solo saper compiere operazioni ma saper regolare tali capacità (self regulated learning) per avere efficacia in situazioni diverse

## **Quale modello???**

- Partire dallo studente
- Effettuare rielaborazioni, discussione, riflessione, esplorazione, azione
- Progresso nella comprensione della realtà
- metodo

## **UNA NOVELLA, STORIA DI UN APPROCCIO COMUNICATIVO**

La ditta di farmaci era invecchiata troppo e il grande capo (così lo chiamavano affettuosamente i dipendenti) decise che era ora di rinnovarsi iniziando soprattutto a ringiovanire il logoro gruppo dei rappresentanti : il vecchio sig Dovari- venditore non andava più con quel suo modo di fare così modesto e impacciato e poi era stato operato e quindi non sarebbe durato a lungo!! E così pure il Dagoli con esperienze di bagnino, che non sapeva altro che raccontar barzellette , vantare amicizie mai al disotto del rango di aiuto ospedaliero, lamentarsi di problemi logistici e ritardi nelle consegne che parevano più puerili che inconsistenti .

Dunque, il grande capo decise, preparò un annuncio sul giornale più importante, richiedendo come spesso si fa: giovani dotati di entusiasmo, con grinta, laureati, e offrendo contratto, auto aziendale, rimborsi, diarie ,provvigioni ecc...

Alla selezione risposero in tanti, ne furono scelti alcuni che trascorsero i primi giorni d'assunzione nell'attesa del capo tra uffici con tavoli e pareti di palissandro e in alberghi di lusso rivestiti di moquette, sfoggiando orologi e telefonini nuovi di zecca (regalo dei genitori fieri del figlio al suo primo impiego).

Tra i nuovi assunti fu scelto il cosiddetto capo zona e a tutti parve logico che fosse lui: orologio d'oro, lineamenti piacevoli, sorriso aperto e atteggiamento sicuro, cravatta classica.

Il capo aveva organizzato un corso preparatorio in cui sarebbero state sviluppate le caratteristiche del farmaco da un punto di vista scientifico e di marketing : vennero così invitati farmacologi universitari che illustrarono caratteristiche chimico fisiche dei prodotti attivi e economisti e psicologi che intervennero in modo approfondito sugli aspetti legati alla comunicazione commerciale tra rappresentante di farmaci e medico.

Dunque il medico andava studiato, si dovevano capire le sue esigenze e quindi si poteva intervenire consigliando esempi di approccio terapeutico con il farmaco della ditta; era sicuramente importante indurre il medico alla discussione con una serie di domande aperte (item) alle cui risposte si poteva interporre una serie di esperienze tratte dalla letteratura e nelle quali lo stesso farmaco poteva vantare risultati apprezzabili e

convincenti.

Il gran capo era visibilmente soddisfatto e commosso quando congedò il gruppo augurando "buon lavoro"

Non eran passati che pochi giorni e già la cosiddetta " forza vendita" era sul campo: il capo zona esperto accompagnò inizialmente il neo assunto nei primi approcci con il medico e dimostrando la propria sicurezza nel superare le fila dei pazienti in attesa, entrò nello studio medico sfoderando un sorriso tra i più tirati e un cordiale saluto. Presentazioni veloci, e via un susseguirsi di domande quali: ha molti pazienti in cura per l'artrosi?, lei pensa che l'obiettivo della terapia possa essere il paziente e non la patologia?, quali tipi di antiinfiammatori ritiene siano meno invasivi o condrolesivi? E' meglio rimedio sintomatico o terapia di fondo?

Tale irruenza fu sicuramente apprezzata dal medico che, senza rispondere, assentiva con un simpatico sorriso e il nostro buon venditore rassicurato continuava con le domande.

Ad un certo punto la scaletta imparata al corso prevedeva che allo stimolo seguisse la descrizione del farmaco e ciò avvenne puntualmente con la enunciazione minuziosa delle caratteristiche chimico fisiche del condroitinsolfato che in quanto mucopolisaccaride poteva essere individuato come matrice di supporto al tessuto cartilagineo, ciò per le proprietà legate ai tioradicali e indipendentemente dalla riduzione dei mediatori prostaglandinici.

Ed infine la domanda tatticamente più importante (quella cioè che avrebbe stimolato nel medico il dubbio sulle proprie convinzioni e avrebbe innescato un processo favorevole all'utilizzo del nuovo farmaco)

"Lei pensa che ARTROSICUR CREMA sia un farmaco unico nella cura della patologia oppure ritiene che tutti i farmaci siano uguali?"

Il sorriso del medico rimase sempre dolce ed accattivante mentre rispondeva che, per lui, tutti i farmaci in crema della famiglia degli antiinfiammatori erano uguali e mentre il malcapitato venditore si arrabattava con formule , radicali , confronti, istogrammi, nella sala d'attesa dell'ambulatorio i pazienti rumoreggiavano più del solito.

**20/03/99 Giorgio Maggi**

## **APPROFONDIMENTI D'ESAME**

### **UAM INTRODUZIONE: C1**

Esplicita opinioni circa l'importanza per un docente di considerare gli elementi che afferiscono all' ambiente di apprendimento.

Gli elementi relativi l'ambiente dell'apprendimento possono essere estesi a tutte quelle componenti, insegnanti, dirigenti scolastici, studenti, famiglie, luoghi, strumenti che riguardano il processo teso al raggiungimento della conoscenza.

I gruppi principali d'elementi che intervengono come "variabili" e che vivono in sinergia sono:

1. Famiglia e studente: la famiglia interviene nell'apprendimento spesso in modo originale o troppo convenzionale (o socio emozionale secondo alcuni) e legato a consuetudini, bisogni, aspirazioni mentre lo studente porta con sé misconcezioni legate a modelli mentali ingenui e spontanei
2. Scuola e docente: la scuola è il "sistema" nel quale il docente interviene



nell'apprendimento utilizzando tecniche (affettive, filosofiche, professionali, autoritarie) e metodi diversi (operativi, sperimentali, di gruppo o di discussione) che per loro natura sono estremamente variabili utilizzando gli strumenti a sua disposizione.

3. Strumenti: principalmente a)tecniche di apprendimento (modelli di insegnamento di tipo comportamentista, del campo o della gestalt, della scoperta o costruttivista); b) lavoro di équipe e collaborazione tra docenti, consigli di classe, collegio docenti, udienze)strumenti pratici come laboratori scientifici, informatici e linguistici.

Tali elementi nella loro complessità possono fraporsi al rapporto docente / discente: spesso non c'è possibilità di "condividere" o di relazionarsi e il pensiero o proposta del docente sovente non coincide con le attese o con gli interessi dello studente, senza che nessuna delle due parti n'avverta la rilevanza.

Fatta salva la metafora del terribile imbuto di Norimberga che pretende di trasferire meccanicamente il pensiero dall'insegnante all'allievo , si possono immaginare filtri vari creati dai vari ambienti di apprendimento, che frapposti possano alterare, modificare, deteriorare i messaggi dell'uno rendendoli incomprensibili all'altro. Dunque non insegnamento o trasferimento di nozioni a senso unico con certezza di insuccesso ma confronto, relazione, condivisione, tra i vari elementi della scuola per raggiungere l'obiettivo di educare ( la stessa etimologia di insegnare= costruire sopra e educare = condurre, tirar fuori..., sono indicative di un metodo)

## **ESERCIZIO C2 UAM**

Gli insegnanti di matematica associano immagini diverse al concetto di matematica: ma gli studenti lo riescono a cogliere?

Quanta umiltà credo si debba anteporre ad una serie di riflessioni su quest'argomento: ciò che è e ciò che dovrebbe essere la matematica o il suo insegnamento, ciò che si potrebbe esprimere con la matematica e ciò che un matematico vorrebbe esprimere ma trova un limite forse proprio nella sua cultura.

Sono queste domande che affiorano alla mente quando, con una provocazione colta, si tenta di discutere in modo creativo e diverso da ciò che i più intendono per matematica.

Lo stesso testo della canzone di Branduardi sembra mettere un limite alle speculazioni matematiche: il sogno Pitagorico, il senso logico e la regola sembrano drammaticamente non servire quando due persone s'incontrano (e forse si amano come s'intuisce dalla poesia). La realtà dell'insegnante di matematica è quella di lavorare in un contesto in cui valori della tradizione e luoghi comuni spesso si confondono e dove matematica è solo programma di matematica e le aspettative dello studente e dei suoi genitori devono essere comunque attese.

Una programmazione tipo di una prima media parte da una introduzione in cui viene indicato un non troppo chiarito metodo "induttivo-deduttivo", mezzi quali lezioni frontali, libri, verifiche, valutazioni e obiettivi specifici con insiemi, potenze, MCD e mcm, frazioni, prime nozioni di geometria: nel testo in ottimo burocratese scolastico si evita di accennare a sogno ,gioco, mistero, bellezza e stupore e forse sarebbe una ingenuità pensare che questi elementi possano essere ufficializzati, ma l'insegnante di matematica li utilizzerà? Saprà spiegare che la matematica, essendo un linguaggio e quindi strumento di comunicazione, potrà anche servire al protagonista della canzone per capire l'illogico se conoscerà il razionale?

## **C3 UAM racconto**

Karl e Susy ripensando al passato elaborano un diario in cui spiegano che cosa vuol dire imparare la matematica partendo da un esempio che ben esprima questo concetto.

(Imparare la matematica significa scoprire in essa il fascino di una singolare avventura umana e avvertirne l'impulso alla scoperta nel momento in cui essa non è più fredda materia di studio)

Karl e Susy avrebbero raccontato di quella volta che.....

.....durante una gita scolastica, mentre tutti eravamo in attesa che il tempo spiovesse, seduti nelle comode poltrone di un'anonima hall di albergo, la prof. si lasciò andare e raccontò la sua storia: aveva conosciuto da poco un distinto e simpatico violinista e lei non più giovanissima ne aveva accettato la corte, e poi si parlò di noi, delle nostre speranze, si discusse di cose, anche di matematica. Mentre ella parlava, i lineamenti, che sembravano sempre così tirati durante le lezioni, apparivano persino piacevoli, se non fosse stato per quell'orrenda verruca, abitata da peli neri, che si muoveva in armonia con la bocca. Era proprio la classica prof. di matematica che tutti noi penso abbiamo dovuto sopportare una volta nella nostra vita, eppure da questo campione traspariva, quasi celata e camuffata, una forte umanità.

Quel giorno piovoso ci rimase stranamente in mente e forse pensammo entrambi la stessa cosa quando, finita la scuola, ci salutammo con le solite formalità ma gli occhi tradivano una complicità che un matematico per sua natura sa esprimere non sapendo comunicare altrimenti.

Chissà come sarebbe finita la discussione su Russel quel giorno, se qualcuno non avesse interrotto la dimostrazione che  $1,2,3...$  e Socrate sono costanti, che se  $a(x + y)^2$  sostituisco i valori di  $x$  e  $y$  con Socrate e Platone ottengo da una implicazione vera una conseguenza a dir poco falsa; e quel paradosso del "fiocco di neve di Koch" in cui preso un triangolo di lato 1 e aggiunto a metà di esso un triangolo dal lato pari ad  $1/3$  di quello del triangolo precedente e lo stesso si fa per i lati liberi di ciascun nuovo triangolo sino ad ottenere un perimetro che aumenta sino all'infinito essendo  $3x4/3x4/3x4/3.....$  e tutto ciò nonostante l'area della figura in evoluzione rimanga minore dell'area del cerchio circoscritto al triangolo originario....

Il cielo si era rischiarato dopo la pioggia, era spuntato un caldo sole e a tutti noi era venuta una gran voglia di correre!

C4 UAM rispondi alle domande

Un gruppo di insegnanti stà dirigendosi verso un bigio edificio. Con la borsa sottobraccio, da cui spunta la copertina di qualche quaderno, camminano in fretta. Si intuisce che arrivano dalla propria scuola, dove probabilmente hanno da poco terminato il loro lavoro. Al gruppetto si affianca un tizio dall'aria stralunata, che si capisce subito non essere dell'ambiente, il quale chiede: "ma dove andate così di corsa?"

Un insegnante risponde sbrigativo: "a un corso di aggiornamento sulla matematica"

"Un corso di che?" il tizio pare non aver inteso

"di matematica" ripete l'insegnante, sempre camminando in fretta.

"matematica? A che cosa serve imparare la matematica?" la domanda del tizio pare proprio impertinente.

**Risposta dell'insegnante: "oh bella questa! Lo sanno tutti: la matematica serve per far di conto, e imparare a far di conto serve nel lavoro, nel commercio, nel quotidiano; può servire a comunicare, a relazionare con gli altri, sicuramente a non lasciarsi condizionare e ad essere consapevoli con il ragionamento!"**

"e come si fa ad imparare la matematica?"

**Risposta dell'insegnante: "non è certo una cosa semplice da spiegare per strada! Certo esistono metodi diversi usati dagli insegnanti per aiutare ad imparare : un buon insegnante sa spiegare passo passo un argomento, sa far scoprire gli aspetti più profondi della materia e pure sa stimolare nello studente la riflessione e la discussione su un certo tema sino a chiarirlo.**

Il tizio si è fatto l'idea che imparare matematica sia una cosa piuttosto difficile e perciò continua a interrogare i malcapitati anche su questo punto.

"ma cosa c'è di difficile nell'imparare la matematica?"

**Risposta dell'insegnante: "per il neofita, per chi non ha una gran pratica di conti , difficile è ricordarsi la regola o le procedure , saperle applicare, saper inventare regole nuove , saper utilizzare la logica e intuire il vero dal falso, saper trovare vie diverse per un'unica soluzione o per più soluzioni, saper fare operazioni con lettere e numeri relativi e quindi saper astrarre, saper mettere in relazione matematica e geometria, matematica e scienza empirica..... "**

" ma cosa si può fare perché la matematica diventi più facile?" conclude il tizio?

**Risposta dell'insegnante: " per sua natura non è possibile render facile la matematica e ben pochi in tanti anni dal tempo di Euclide e il re hanno tentato una simile operazione . Forse facile è il metodo per capirla : potrebbe essere un buon metodo quello della riflessione , quello di esercitarsi sull'analisi problematica che presume una sequenza nella quale si prevede il problema risolto e se ciò non è possibile, da questo si preveda un ulteriore problema risolto e così di seguito, quello della sintesi che rielabora e sceglie il giusto percorso? "**

"ma allora chi è più bravo e chi meno bravo ad imparare la matematica?" conclude il tizio?

**"forse chi ha un carattere riflessivo e analitico, o forse solo chi non abbandona alla prima difficoltà e trova una sua strada personale per arrivare!"**

"come si fa a sapere se uno ha imparato la matematica? "

**"è certamente più facile "sentire" che "vedere" se uno ha imparato la matematica : infatti spesso un ragionamento logico svela, con più sicurezza di un buon esercizio risolto, un esperto di matematica"**

"senta non abbiamo più tempo per risponderle, se proprio vuol sapere tutte queste cose, venga con noi: di solito ai corsi di aggiornamento si perde tempo ma non è detto che stavolta si capisca qualcosa"

C5

Identificare il modello di apprendimento sottostante a ciascuna modalità di insegnamento sotto descritta:

l argomento =Dimostrazione dell'eguaglianza degli angoli opposti al vertice

- a) **Un modo per vedere se due cose**.....modello associazionista in cui vengono espresse definizioni ed elementi dell'apprendimento in sequenza e in associazione
- b) **Proviamo a misurare**.....modello della scoperta in cui lo studente ripercorre in forma semplificata il percorso verificato dal maestro, ricostruendolo.
- c)**Proviamo a considerare se la figura può essere vista in**.....modello costruzionista che parte dalla figura : l'insegnante è consapevole che la figura che lui vede non è necessariamente quella vista dagli studenti e quindi parte dalle convinzioni di quest'ultimi per uniformare e chiarire il suo pensiero

d) **Qual è l'obiettivo?** ..... modello della scoperta misto a modello di campo in cui l'insegnante traccia con la domanda iniziale il senso del problema che appare, dalle domande successive risolvibile seguendo un percorso ben definito dall'insegnante... (**nella figura ci sono due angoli che è evidente che sono uguali?** .....), per altro si intravede il modello di campo quando, fissato l'obiettivo centrale, si cercano relazioni, obiettivi intermedi, eguaglianze

Il argomento: calcolo dell'area del rombo

a) **il rombo assomiglia a** ..... modello costruzionista, (infatti il rombo può rassomigliare a due triangoli contrapposti, quattro triangoli, può essere trasformato in rettangolo) da come lo studente vede il rombo si può partire per calcolarne l'area

b) **guardate la figura** ..... modello della scoperta in cui lo studente è stimolato a seguire un cammino già stabilito dall'insegnante, lasciando intravedere risposta dopo risposta il senso del percorso.

c) **il segmento AC si chiama** ..... modello associazionista in cui si danno dati sintetici in sequenza per risolvere il problema

d) **voi che fareste** ..... modello costruzionista che indaga sui modelli mentali ingenui degli studenti e che da questi può partire per arrivare a svolgere l'argomento, può anche proseguire con un modello diverso sviluppando un modello misto personale.

e) **guardate la figura** ..... se la risposta "il rombo è composto da 4 triangolini" viene dagli studenti si tratta di un modello costruzionista, mentre se si tratta di una affermazione dell'insegnante il modello è associazionista ... le stesse considerazioni valgono anche per le sequenze successive

C6

Luigi conosce perfettamente l'indirizzo di Mario ma non ha compreso il percorso necessario per arrivare a casa sua, egli applica le indicazioni avute dall'amico mettendosi in viaggio e durante il viaggio ripensa a quella strana frase che Mario spesso ripete scherzando: <ricorda che il mio indirizzo è come il Teorema di Pitagora...!>. Possibile che da un teorema e un indirizzo si possa inferire un principio generale ad essi impliciti? Luigi raggiungerà sano e salvo l'amico Mario e, pur non comprendendo quello che appare nonsenso o paradosso, conosce, comprende, applica, inferisce e perché no! Dimostra anche che non era così difficile raggiungere l'amico!

Lo stesso Luigi frequenta una scuola serale di licenza media e nella verifica mensile di matematica deve rispondere alle seguenti domande:

- 1) Cosa dice il teorema di Pitagora geometricamente e algebricamente ?
- 2) Perché il quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti?
- 3) Date le misure dei tre lati di un triangolo si può stabilire se è rettangolo?
- 4) Calcola la misura di un cateto del triangolo rettangolo che ha l'altro cateto di 12 cm e l'ipotenusa di 15cm.

Luigi dovrà conoscere, dimostrare, comprendere, o applicare: a quale domanda della verifica si possono riferire i verbi suggeriti?

C6 UAM strategie di ragionamento

- **Inferenza statistica**, :procedimento di generalizzazione dei risultati ottenuti attraverso una rilevazione parziale per campioni.

- Conversione : 3 (filos.) In logica, operazione che consente di inferire in modo immediato da una proposizione un'altra proposizione mediante una semplice inversione dei termini.
- Indurre : 3 (filos.) Inferire da determinate osservazioni o esperienze particolari il principio generale in esse implicito.

### Dimostra

- Dimostrare a priori: · (filos.) Complesso delle conoscenze o dei giudizi cui si perviene con la pura ragione prescindendo dall'esperienza.
- Ragionamento circolare :che dimostra le proposizioni da cui è partito come assiomi
- Paradosso: Proposizione formulata in apparente contraddizione con l'esperienza comune (i p. degli stoici) o con i principi elementari della logica, ma che all'esame critico si dimostra valida (per es. il p. idrostatico, relativo alla pressione dei liquidi)
- Aporema :Silllogismo dubitativo che dimostra l'ugual valore di due ragionamenti contrari

### Applica

- Il quadrato del valore assoluto della funzione d'onda corrisponde alla probabilità di esistenza della particella in una data regione dello spazio. Quando si applica questa equazione a sistemi reali, quali l'elettrone dell'atomo di idrogeno, essa può essere risolta solo attribuendo alla energia totale della particella valori discreti corrispondenti a numeri interi; da ciò deriva che i valori che può assumere l'energia totale dell'elettrone sono quantizzati e distinti tra loro
- Assioma : Affermazione che è superfluo dimostrare perché palesemente vera.
- Sostenere il proprio assunto:.. Ciò che si deve dimostrare
- dimostrare un teorema di geometria
- prova: Ogni esperimento compiuto per accertare le qualità di una cosa, dimostrare il valore o la giustezza di un'affermazione, verificare le attitudini di qc. o controllare il funzionamento di una macchina: sottoporre a prova una lega metallica

Luigi ..... perfettamente l'indirizzo di Mario ma non ha ..... il percorso necessario per arrivare a casa sua, egli ..... le indicazioni avute dall'amico mettendosi in viaggio e durante il percorso ripensa a quella strana frase che Mario spesso ripeteva scherzando:< ricorda che il mio indirizzo è come il Teorema di Pitagora...!>.

Possibile che da un teorema o un indirizzo si potesse ..... un principio generale ad esso implicito?

Luigi raggiunse sano e salvo l'amico Mario e, pur ritenendo superflua la sua affermazione, non riuscì mai a ..... che poteva essere palesemente vera.

Luigi conosce perfettamente l'indirizzo di Mario ma non ha compreso il percorso necessario per arrivare a casa sua, egli applica le indicazioni avute dall'amico mettendosi in viaggio e durante il percorso ripensa a quella strana frase che Mario spesso ripeteva scherzando:< ricorda che il mio indirizzo è come il Teorema di Pitagora...!>.

Possibile che da un teorema o un indirizzo si potesse inferire un principio generale ad esso implicito?

Luigi raggiunse sano e salvo l'amico Mario e, pur ritenendo superflua la sua affermazione, non riuscì mai a dimostrare che poteva essere palesemente vera.

C7

Esplicita le tue convinzioni riguardo i punti sotto elencati ( a confronto con quelle degli studenti)

<p><b>1 Secondo te , la matematica a quali materie scolastiche assomiglia?</b></p>	<p>1°A Assomiglia a storia perché ci sono le date, tecnica per le figure geometriche, musica per la scala dell'arpa</p> <p>2°A: Assomiglia a.....</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• più materie : tutte si "fondono", ci sono "collegamenti" (in tecnica si usano i numeri e in artistica si disegnano le figure geometriche</li><li>• scienze, fisica, e geografia perché si usano formule e regole( la misura è una formula)</li><li>• storia perché bisogna ricordare la successione delle varie vicende o operazioni; storia perché si studiano personaggi che hanno ideato nuovi sistemi come Pitagora, Newton, Galileo; italiano perché ci sono concetti e regole da cui si possono capire anche le altre materie; storia perché ci sono le date</li><li>• romanzo di letteratura perché ogni spiegazione è un racconto;</li><li>• più che ad una materia assomiglia ad un gioco mentale che richiede però ragionamento e impegno</li></ul> <p>3°A</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• tecnica, scienze, geografia perché molti punti combaciano con la matematica</li><li>• storia perché anche se a volte è pesante , spesso è divertente</li><li>• italiano perché aiuta a ragionare e applicare le cose che serviranno nella vita ; non conoscendo matematica e italiano non si potrebbero fare le cose che sappiamo fare;</li><li>• assomiglia ad italiano e grammatica perché è basata su regole</li><li>• matematica è una materia a sé e non assomiglia ad altre</li></ul>
<p><b>2 Che differenza c'è in matematica tra eseguire un esercizio e risolvere un problema</b></p>	<p>1°A nel problema devi pensare mentre l'esercizio essendo una ripetizione del problema è più facile</p> <p>2°A :</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• è più facile eseguire un esercizio al posto che alla lavagna perché si può pensare meglio</li><li>• per eseguire un esercizio non ho bisogno dei dati iniziali</li></ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• nessuna differenza perché un esercizio può essere un problema e viceversa( e poi sempre di matematica si tratta!);uso sempre lo stesso metodo: leggo attentamente, ragiono, esemplifico, applico la regola</li> <li>• l'esercizio è più facile perché non richiede tanta riflessione : un problema richiede ragionamento, impegno; un esercizio avviene automaticamente</li> <li>• per me eseguire e risolvere sono sinonimi</li> <li>• per saper fare un problema prima bisogna capire e poi saper fare esercizi</li> </ul> <p>3°A</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• nessuna differenza, si deve sempre ragionare, impegnare</li> <li>• nessuna differenza , bisogna conoscere le regole</li> <li>• per eseguire un esercizio che è solo una operazione bisogna seguire le regole e trovare un risultato mentre in un problema si deve ragionare più profondamente perché prima del risultato bisogna trovare il modo di trovare la soluzione.</li> <li>• un problema richiede più tempo di un esercizio; un problema è molto più pratico</li> </ul>
<p><b>3 E' vero che un problema in matematica o lo capisci subito o non ci riesci più?</b></p> <p><b>(continua)</b></p>	<p>1°A non è vero: i ragazzi sostengono che è così perché prima devi riflettere come dice sempre il professore</p> <p>2°A:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• vero anche se posso capire dal libro, esercizi di compito, chiedere al prof di rispiegarmelo ;spesso capita di non arrivarci ed io preferisco affrontare altri problemi; in qualunque problema io arrivo sino a metà;</li> <li>• non vera! Se non si capisce subito me lo faccio rispiegare e poi la regola viene d'istinto; se ci ragioni su lo puoi capire anche se non immediatamente; spesso puoi anche trovare una strada alternativa a quella spiegata dal prof ;puoi ragionare in vari modi ad esempio facendo una scaletta, oppure iniziando dalla fine come ha spiegato il prof.;</li> </ul> <p>3°A</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• non vero, si può capire anche con lentezza, pensandoci; se c'è volontà e impegno si capisce sempre; è importante seguire un ragionamento preciso;capire ragionando;</li> </ul>

<p><b>4 Sei d'accordo che gli studenti bravi in matematica sono anche i più intelligenti?</b></p>	<p>1°A non è vero perché è impossibile che chi ha un cervello ( e tutti ce l'hanno) non sia anche intelligente: chi non è bravo in matematica non vuole studiare, ragionare, non ha trovato lo spirito giusto</p> <p>2°A .</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Sì, se uno studente è bravo, è anche intelligente perché se ha talento lo sa anche sfruttare ; per ragionare in matematica è necessario essere intelligenti; la matematica per alcuni è difficile perché bisogna capire òe cose alla svelta</li> <li>• No, ognuno ha le proprie " potenzialità" che sfrutta in italiano o in matematica; uno studente bravo in matematica può essere anche meno intelligente se intelligenza è anche facilità nella manualità e pratica in ginnastica, musica o tecnica; alcuni possono essere bravi in matematica ma incapaci in altre materie o attività; alcuni sono bravi in matematica perché la ritengono materia preferita e si applicano di più che in altre; no perché io la capisco la matematica!; no perché la matematica potrebbe anche solo non piacere; persona intelligente è persona educata e magari poco portata per la matematica; potrebbe anche darsi che una persona brava in matematica abbia un animo cattivo e dunque sia poco intelligente; è bravo in matematica chi studia e ha i genitori che sono rappresentanti di classe;</li> </ul> <p>3°A</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• molti sono bravi in matematica ma non capiscono niente in altre materie ;</li> <li>• molti altri non sono bravi in matematica perché non hanno volontà;</li> <li>• si è bravi in una materia se questa piace; ognuno è bravo in qualcosa e nessuno è perfetto;</li> <li>• per essere bravi in matematica bisogna conoscere bene le regole e per questo non serve essere intelligenti (risposta data da uno studente ritenuto ottimo in tutte le materie , lo stesso che ritiene che matematica assomigli ad italiano proprio perché contiene regole)</li> <li>• sembra vero :io ad esempio me la cavo in matematica purtroppo non vado molto bene nei temi</li> <li>• sono d'accordo infatti la matematica aiuta a ragionare e quindi ad essere sempre più intelligente</li> </ul>
<p><b>5 In quali situazioni la matematica</b></p>	<p>1°A</p>



<b>imparata a scuola può essere applicata?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Nella musica, nel gioco.</li> </ul>
	<p>2°A</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>per i conti in casa, all'estero quando si fanno i conti sul cambio delle monete, nel gioco, per far la spesa, nel lavoro, nel progetto in ingegneria, nel commercio, nelle costruzioni, in banca, per non essere imbrogliati, in agricoltura, in zootecnica per calcolare la dieta delle mucche, in musica perché si fa sempre riferimento alle frazioni, all'uncinetto,</li> </ul> <p>3°A</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>nel lavoro (risposta ripetuta da tutti gli studenti), nella vita comune , per fare conti;</li> <li>quando si pensa a cosa si deve fare ad esempio calcolare i tempi per una operazione</li> <li>in tutte le situazioni (risposta dello stesso studente che ritiene che la matematica non assomigli ad altre materie)</li> </ul>

#### C8 mis-concezioni (maggi giorgio)

Misconcezioni : idee primitive che non derivano da informazioni travisate, ma da un modello mentale inadeguato pur legato ad idee coerenti

"se non me lo spiega io non lo capisco!" è forse uno dei modelli mentali ingenui più frequenti negli studenti delle prime classi di scuola media contemporaneamente al passaggio dal concreto al formale

Il prof. di matematica fa fare equazioni lunghe perché pensa che con questo sistema si possa capire meglio l'ordine e la metodicità in matematica ( misconcezione ? ) o più opportunamente pensa che una equazione lunga sia la dimostrazione più esplicita a genitori e preside di quanto egli ha lavorato in classe?( e non potrebbe essere anche questa una più evoluta....misconcezione?)

Alcuni procedimenti meccanici di apprendimento si riducono a misconcetti quando non vengono rielaborati da un ragionamento : l'esempio potrebbe essere il concetto di sconto percentuale in una classe seconda media. Alle elementari lo studente impara a moltiplicare semplicemente il prezzo per lo sconto e dividerlo per cento, alle medie sempre meccanicamente lo studente impara a realizzare una tabella a due colonne in cui metterà sconto e prezzo e introdurrà i dati ; nei due casi non si chiederà mai se dopo aver applicato lo sconto il prezzo sarà sceso in modo proporzionale. E' tipico risolvere un problema del tipo : una giacca costava 70.000 £ quanto costa ora se è stato applicato il 15% di sconto?  $70.000 : x = 15 : 100$  Risoluzione  $x = 467.000$

In una terza media il concetto di volume viene identificato ad area totale del solido , ciò perché un solido "internamente non ha niente!" mentre le pareti sono misurabili

L'altezza di una piramide non può essere altro che l'altezza di uno dei suoi lati e cioè l'apotema!!

In scienze le misconcezioni degli studenti sono più evidenti quando si discute sul sistema microscopico: atomo costituito da palline, gusci, riempito di una particolare aria tra nucleo

e elettroni, sali che precipitano sono sali che cadono giù, tamponare significa mettere il dito sulla provetta, se il ferro si ossida non è necessario che partecipi anche l'ossigeno alla reazione e la ruggine intacca il ferro; puro si può riferire ad olio, acqua naturale e limpida.

Relazione per esame del 18.05.99

Relazione di Giorgio Maggi per Prof Bertagna

Esempio di Esame di stato al Liceo Scientifico "Gennaro Esposito" con applicazione dei suggerimenti alla nuova normativa dell'Esame di Stato.

Nome degli studenti Fanti, Garrone e De Amicis

**Valutazione della ..... prova scritta** con griglia , indicatori , peso(variable deciso dalla Commissione) e punteggio finale (D.M.356) da 1 a 15 con sufficienza da 10(cioè 66% di 15)

indicatori	Proprietà d'uso della lingua	Possesso di adeguate Conoscenze	Sviluppo critico	Discorso organico coerente personale	Analisi e commento del testo	PG Punteggio grezzo	Perc Max= (PG*/PGmax)* 100
Pesi decisi dalla Commissione	1,5	1,5	1	1	1	Peso totale= 6	PGmax Votoma peso to = 5 * 6 = 30

Candidati e valutazione da 1 a 5 per ogni indicatore

(1=gravemente insufficiente;2=insufficiente;3=sufficiente;4=discreto/buono; 5buono/ottimo

il punteggio grezzo sufficiente potrà essere punteggio grezzo massimo\*10/15 = 30\*10/15=20 (cioè 66% di 30)

candidati	Voto	PG1 =	Voto	PG1 =	Voto	PG1 =	Voto	PG1 =	Voto	PG1 =		
		Voto * peso		Voto * peso		Voto * peso		Voto * peso		Voto * peso		
Fanti	1	1*1,5 =1,5	4	4*1,5 =6	2	2*1 =2	3	3*1 =3	1	1*1 =1	å = 13,5	13,5*10/30 = 45

Garrone		3	3*1,5 =4,5	2	2*1,5 =3	3	3*1 =3	4	4*1 =4	3	3*1 =3	$\bar{a} = 17,5$	17,5*10 30 = 58
De Amicis		4	4*1,5 =6	5	5*1,5 =7,5	4	4*1 =4	5	5*1 =5	4	4*1 =4	$\bar{a} = 26,5$	26,5*10 30 = 88

- La valutazione della prova scritta di Fanti sarà compresa tra 1 e 15 (voto suff = 10) e seguirà la formula :

$$\text{Voto} = \text{voto suff} + (\text{punt.grezzo} - \text{punt. Suff}/\text{punt.max-punt suff}).(\text{voto max} - \text{voto suff})=$$

$$\text{Voto} = 10 + (13,5 - 20/30-20).(15 - 10)=6,75 \text{ su } 15$$

$$\text{Oppure Voto} = \text{voto suff} + (\text{perc max} - \text{perc Suff}/1-\text{perc suff}).(\text{voto max} - \text{voto suff})=$$

$$\text{Voto} = 10 + (0,45 - 0,666/1-0,666).(15- 10)= 6,7$$

La stessa formula approssimata in perc max =0,6 darà

$$\text{Voto} = 10 + (0,45 - 0,6/1-0,6).(15- 10)= 8,1$$

- La valutazione della prova scritta di Garrone sarà

$$\text{Voto} = 10 + (17,5 - 20/30-20).(15 - 10)=8,75 \text{ su } 15$$

- La valutazione della prova scritta di De Amicis sarà

$$\text{Voto} = 10 + (26,5 - 20/30-20).(15 - 10)=13,25 \text{ su } 15$$

Valutazione finale :

La Commissione può decidere che De Amicis sia promosso e Fanti e Garrone bocciati, oppure può abbassare il punteggio grezzo sufficiente in modo da "favorire" in senso algebrico la sufficienza.

Infatti fissato il punteggio grezzo sufficiente in 13, la valutazione sarà :

- La valutazione della prova scritta di Fanti seguirà la formula :

$$\text{Voto} = \text{voto suff} + (\text{punt.grezzo} - \text{punt. Suff}/\text{punt.max-punt suff}).(\text{voto max} - \text{voto suff})=$$

$$\text{Voto} = 10 + (13,5 - 13/30-13).(15 - 10)=10,15 \text{ su } 15$$

- La valutazione della prova scritta di Garrone sarà

$$\text{Voto} = 10 + (17,5 - 13/30-13).(15 - 10)=11,32 \text{ su } 15$$

- La valutazione della prova scritta di De Amicis sarà

$$\text{Voto} = 10 + (26,5 - 13/30-13).(15 - 10)=13,97 \text{ su } 15$$

Conclusioni finali: Fanti avrà un voto insufficiente che a seconda della approssimazione della formula andrà da 6,7 a 8,1(e così per il voto insufficiente di Garrone e sufficiente di De Amicis). Se la Commissione decidesse di premiare il buon andamento scolastico di Fanti, rispetto all'assoluto disinteresse e noncuranza di Garrone, dovrebbe ridurre da 20 / 30 a 13 / 30 il punteggio grezzo sufficiente e dovrebbe altresì accettare un miglioramento del punteggio di Garrone e una assoluta non modificazione del punteggio del bravo De Amicis ( un punteggio più equo sarebbe frutto solo di una sostanziale falsificazione dei dati).

Il lavoro andrà ovviamente ripetuto per seconda prova, terza prova, prova orale e tutto ciò nonostante lavori di prestigio dimostrino l'assoluto valore scientifico del metodo di valutazione olistico.

**Valutazione della 2° prova scritta** con griglia , indicatori e peso(variabile) deciso dalla Commissione dopo aver diviso ad esempio in 4 parti la traccia e aver aggiunto come indicatore il possesso delle conoscenze specifiche come indicato in decreto

indicatori	1° parte della traccia d'esame	2° parte della traccia d'esame	3° parte della traccia d'esame	4° parte della traccia d'esame	Possesso conoscenze specifiche	PG Punteggi o grezzo	Perc Max= (PG*/PGmax) * 100
Pesi decisi dalla Commissione	3	0,5	1	1,5	1	Peso totale= 7	

Candidati e valutazione da 1 a 5 per ogni indicatore

(1=gravemente insufficiente;2=insufficiente;3=sufficiente;4=discreto/buono; 5buono/ottimo)

candidati	Voto	PG1 = Voto * peso	Voto	PG1 = Voto * peso	Voto	PG1 = Voto * peso	Voto	PG1 = Voto * peso	Voto	PG1 = Voto * peso	PGmax	Votomax peso totale = 5 * 7 = 35
Fanti	2	2*3 =6	4	4*0,5 =2	3	3*1 =3	3	3*1,5 =4,5	1	1*1 =1	16,5	16,5*100/35 = 47,1
Cogrossi	4	4*3 =12	3	3*0,5 =1,5	3	3*1 =3	4	4*1,5 =6	2	2*1 =2	24,5	24,5*100/35 = 70
De Amicis	4	4*3 =12	5	5*0,5 =2,5	3	3*1 =3	5	5*1,5 =7,5	3	3*1 =3	28	28*100/35 = 80

**Valutazione della 2° prova scritta seguendo altra strada** con griglia , indicatori e

peso(variable) deciso dalla Commissione

Fissato il valore massimo per gli indicatori , l'insegnante (in modo olistico!!!???) darà un voto proporzionato al valore dello studente per quella determinata parte.

indicatori	1° parte della traccia d'esame	2° parte della traccia d'esame	3° parte della traccia d'esame	4° parte della traccia d'esame	Possesso conoscenze specifiche	PG	Perc Max
Punteggio parziale massimo	15	2,5	5	7,5	5	Punteggio grezzo	$(PG^*/PG_n^x) * 100$
						punteggio totale= 35	

Candidati e valutazione da 1 a 5 per ogni indicatore

(1=gravemente insufficiente;2=insufficiente;3=sufficiente;4=discreto/buono; 5buono/ottimo

candidati	Voto	Voto	Voto	Voto	Voto		
Fanti	6	2	3	4,5	1	å = 16,5	$16,5 * 100 / 5 = 47,1$
Garrone	12	1,5	3	6	2	å = 24,5	$24,5 * 100 / 5 = 70$
De Amicis	12	2,5	3	7,5	3	å = 28	$28 * 100 / 35 = 80$

### Studio di problema per prof Manara

1. **Definizione di problema:** quesito che richiede la determinazione o la costruzione di una o più soluzioni che soddisfino a date condizioni fissate in precedenza, a partire da alcuni dati conosciuti facenti parte dell'enunciato; p. determinato, se ammette un numero finito di soluzioni; p. indeterminato se ammette infinite soluzioni; p. impossibile, se non ammette nessuna soluzione. P.di determinazione se da dati si deve determinare un risultato, p.di dimostrazione se da una ipotesi si può giungere ad una tesi. Meno freddamente il problema è una sfida intellettuale che viene dall'esercizio: esso induce a progettare, creare strategie, stimola la fantasia in situazioni sempre nuove, insegna la razionalità nell'uso delle regole e ne fa comprendere la sintesi.

## 2) Fasi del procedimento di sviluppo e soluzione di un problema

Risolvere un problema significa :

1. Per alcuni imparare a progettare e per altri saper eseguire, con le evidenti implicazioni che progettare è sicuramente più creativo e razionale che eseguire
2. trovare strategie diverse per creare un percorso ragionevole al raggiungimento del risultato , diverso dal comportamento dell'esecutore che ripete un percorso precostituito o risolve per tentativi.

### 3. Metodo di analisi e sintesi

Le fasi o passi del problema si articolano nei tre punti :

1. Analisi e comprensione del testo : spesso le difficoltà linguistiche sono un limite in quando il testo non viene capito o frainteso (sovente i dati sono impliciti e vanno ricercati)
2. Ricodificazione del contenuto del testo : si schematizza il testo con un sistema il più delle volte personale .La rappresentazione schematica ha la funzione di trasporre i dati in modo che si possa operare da un contesto linguistico ad un ambiente puramente matematico.
3. Esecuzione : operazione che prevede riflessione iniziale e studio di una strategia complessiva o schema logico completo. I sistemi sono due : utilizzo di modelli precedenti oppure rielaborazione di modelli precedenti simili. E' importante che passo per passo i calcoli siano attendibili e verificati

### 4. Funzioni del problema nel lavoro didattico

Sia in Bigosky che in Freudenthal la didattica utilizza il problema per mettere lo studente in quella che è stata chiamata "la zona di sviluppo prossimale" e cioè quella zona della consapevolezza che permette allo studente, che ha buoni presupposti iniziali, di procedere nella strategia che gli permetterà di raggiungere il risultato ( problema come stimolo).

Questo importantissimo momento rappresenta la fase critica per creare lo schema logico che permetterà di partire nella ricerca della risoluzione. Se lo studente possiede gli strumenti e conosce la fatica del percorso si aprirà all'apprendimento ( studenti intelligenti che non sviluppano una simile strategia non danno risultati apprezzabili)

Il problema aiuta ad arrivare ad una definizione , ad una sintesi , aiuta a generalizzare (partire da una regola, definizione, sintesi , formalismo, può considerarsi un sicuro insuccesso in chi tenta di raggiungere l'obiettivo in modo creativo e razionale e dà risultati instabili anche in chi è esecutore )

### 5. Legami tra linguaggio, logica e contenuti matematici nella attività di soluzione di un problema

La risoluzione del problema richiede osservazione, intuizione e l'uso di strumenti logico deduttivi : ogni teoria matematica è composta da un linguaggio e apparato deduttivo nel quale coesistono la logica degli enunciati (costituita da teoremi o leggi della logica) e logica dei predicati in cui esistono relazioni assieme alle connessioni(relazione di disuguaglianza ad esempio in " $x$  minore di  $y$ ").

Alla base della logica degli enunciati sono gli assiomi (massima sintesi di riflessioni matematiche durate millenni ; gli assiomi di Euclide raccolgono la millenaria tradizione egizia ) che introducono il teorema (enunciato composto da proposizioni dette ipotesi e tesi)

## 6. Possibili difficoltà concettuali o psicologiche che interferiscono con l'attività di risoluzione dei problemi

Il cognitivo da solo ha i limiti conosciuti e la risoluzione di un problema non sta nella conoscenza della formula ma nella relazione e quindi nel saper capire scomporre, ampliare, usare e applicare la formula: Ciò può creare barriere psicologiche in una situazione in cui sia impossibile riflettere. Inoltre una difficoltà nella semantica del linguaggio può indurre a difficoltà nella comprensione dei concetti.

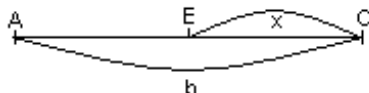
### 2) Elaborazione di alcuni problemi di ottimo risolti con derivata di funzione che si annulla in un punto di massimo o di minimo

Per poter meglio spiegare il concetto di derivata penso possa essere importante richiamare le indicazioni dell'Ing. Gustavo Bessièrè in "il calcolo differenziale e integrale" (Hoepli).

L'autore con esempi appropriati esprime l'idea di derivata di funzione partendo dalla sua definizione come incremento di una funzione rispetto ad una unità di variabile.

Tra i tanti esempi penso sia interessante riproporre alcuni che lo stesso Bessièrè offre come "omaggio a Fermat" nei quali lo stesso Fermat calcola i valori di una funzione in cui la sua derivata si annulla trovandosi ad un minimo o un massimo e dunque nel punto in cui non si ha incremento della funzione stessa. (per il principio di Fermat, la possibile traiettoria T di un raggio luminoso in un fluido a indice di rifrazione n è quella che rende stazionario l'integrale  $nTds$  cioè quella percorsa nel minor tempo possibile). Tutto ciò ben sapendo che Pierre de Fermat vive in Francia nel 1600 ben prima della applicazione del calcolo infinitesimale di Leibnitz e della flussione di Newton)

PROBLEMA : Dividere il segmento AC in modo che  $AE \times EC$  sia massimo



Fissato  $AE=b$  e  $EC=x$  deve essere massimo  $AE \cdot EC=(b-x) \cdot x=bx-x^2$

immaginando di aggiungere e togliere un numero infinitamente piccolo e ai segmenti studiati avrò :

$$AE-e \cdot AE+e = (b-x-e) \cdot (x+e)=bx+be-x^2 -2ex-e^2$$

perchè questo sia massimo sarà uguale al precedente e cioè

$$bx+be-x^2-2ex-e^2 =bx-x^2$$

$$be = +2ex+e^2$$

dividendo per e

$$b = +2x+e$$

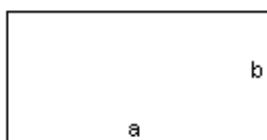
sopprimendo e perchè infinitamente piccolo

$$b = +2x$$

Usando le derivate si potrebbe scrivere così:

Trovo il massimo per la funzione  $bx-x^2$  in modo che la sua derivata si annulli, dunque  $b-2x=0$  e quindi  $b=2x$

**PROBLEMA 2** : Allo stesso modo posso immaginare quale tra diversi rettangoli con lo stesso perimetro sia quello con superficie più grande



$$p=2a+2b \text{ quindi } b = \frac{p-2a}{2}$$

$$S=ab \text{ quindi } S = a \frac{(p-2a)}{2}$$

valuto S funzione di a

$$S = \frac{ap}{2} - a^2$$

la derivata di S funzione di a sarà  $S' = \frac{p}{2} - 2a$

quando S è massimo la sua derivata si annulla  $\frac{p}{2} - 2a = 0$   
e quindi  $p = 4a$

Sostituendo a  $p = 2a + 2b$  ottengo  $2a+2b =$

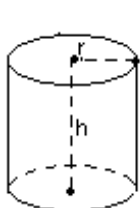
$4a$  e quindi  $b = a$  ( il parallelogramma è quadrato)

Se capovolgo il problema e cioè calcolo quale tra i diversi rettangoli a stessa superficie ha il perimetro più piccolo sostituisco il valore di  $b = S/a$  al perimetro  $p = 2a + 2b = 2a + 2S/a$ .

La derivata del perimetro funzione di a sarà  $p' = 2 - 2s/a^2$  e al suo valore minimo sarà  $=0$   
 $2 - 2s/a^2 = 0$  e  $S=a^2 = ab$  dunque  $a = b$  ( il parallelogramma è quadrato)

(Un problema di questo tipo può essere utile per mettere in relazione le intuizioni di Fermat, le derivate e il problema degli isoperimetri di Zenodoro : tra tutti i poligoni di uguale perimetro con n lati, è massima l'area di quello regolare)

**PROBLEMA N°3** (Ripropongo il problema del carburatore) Devo costruire un serbatoio che a parità di volume abbia minima superficie ( dunque meno pesante , meno costoso, con minor superficie radiante se si tratta di un serbatoio petrolifero )



Essendo il volume  $V = \pi r^2 h$  e quindi  $h = \frac{V}{\pi r^2}$

Essendo la superficie totale  $S_t$  e sostituendo

$$S_t = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + 2V \frac{1}{r}$$

La variabile S rispetto ad r deve essere minima e cioè la sua derivata  $=0$

$$S'_t = 4\pi r - 2V \frac{1}{r^2} = 0 \text{ e } 4\pi r = 2V \frac{1}{r^2} \text{ e quindi } 4\pi r^3 = 2V$$

e sostituendo  $V = \pi r^2 h$   $4\pi r^3 = 2\pi r^2 h$

ricavo  $2r = h$

...

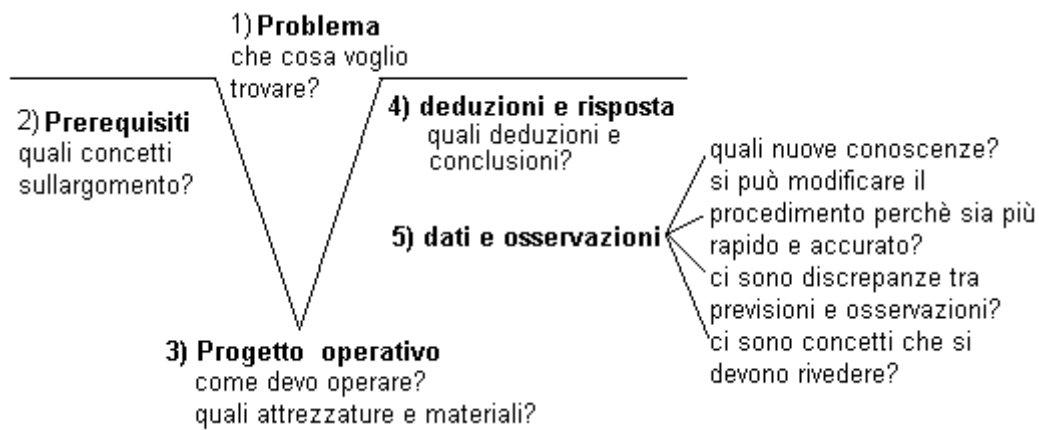
...

Il problema può essere risolto con il sistema del " problem solving"

Un'applicazione pratica del problem solving è la V di Gowin in cui

La V separa le CONOSCENZE dall'INDAGINE





## appunti di epistemologia

Appunti di Epistemologia per esami del 18\05\99

Epistemologia : filosofia della scienza o critica della conoscenza scientifica che non è analisi dei metodi scientifici e nemmeno solo storia della scienza ma rappresenta il settore di riflessione critica di metodi, principi, ipotesi e risultati ( la gnoseologia nasce come critica della conoscenza in generale) Scienza è un'insieme di ipotesi espresse con particolare linguaggio che individua un universo di oggetti

### A che serve l'Epistemologia?

L'indagine scientifica è possibile solo in virtù della consapevolezza dei fini , del significato e valore della ricerca stessa, dunque è fondamentale la complementarità tra scienza e filosofia per raggiungere la criticità, sperimentaltà, costruzione concettuale, spirito animatore della ricerca, fede nella ragione e suo controllo

Dunque non è sufficiente porre a confronto assiomi o postulati e successivamente teoremi e manipolazioni logiche e matematiche con i dati sperimentali e dire provata una teoria in cui dati teorici e pratici siano somiglianti ( quasi come un gioco di sillogismi)

### Quando nasce l'Epistemologia?

L'epistemologia nasce a metà dell'ottocento dopo la crisi generata dalle geometrie non euclidee e si affermano nuovi modelli di pensiero critico : Logicismo, formalismo e intuizionismo

### Quali note sul logicismo?

Il logicismo come modello di pensiero nasce con Frege nel 1903 e Russel nel 1925 : il significato di numero cambia diventando principio logico : cioè NUMERO = CLASSE o INSIEME.

Il numero non nasce dalla ricerca ma è preesistente ad essa (secondo la concezione Platonica) e quindi il numero / sarà un insieme ad esempio di giorni della settimana, saggi dell'antichità, re di Roma : una concezione di questo tipo porterà al cosiddetto paradosso di Russel.

### Sintesi del paradosso di Russel

Se il numero è un insieme o classe , se tale principio è usato impropriamente può entrare in contraddizione perchè si possono descrivere due tipi di insieme:

1. classi di insiemi **non normali** che contengono se stessi: esempio un gregge è un insieme di greggi che a loro volta sono greggi; il colore bianco è un insieme di colori diversi che a loro volta contengono il bianco; i libri della biblioteca sono un insieme di libri che contengono il catalogo che è a sua volta insieme

2. classi di insiemi **normali** che non contengono se stessi: esempio una classe di studenti è formata da studenti che non contengono a loro volta studenti; un popolo è un insieme di uomini che non contengono a loro volta popoli

Il paradosso nasce quando si considerano classi di classi o classi di secondo livello : saranno normali o non normali?

Esempio " un barbiere è colui che rade tutti coloro che non si radono da sè"(se lui si rade entra in contraddizione perche lui deve radere solo quelli che non si radono da se; se non si rade non è un barbiere perchè un barbiere rade

"un postino è colui che prende la posta per coloro che non la prendono da soli"

Quali note sul formalismo?

Metamatemica che tenta di raggiungere un obiettivo formale, attraverso la formulazione di postulati, che dia sicurezza sulla possibilità di procedere nella logica matematica senza incorrere in paradossi come quello di Russel

Idee nuove e crisi dei fondamenti della fisica e della matematica

Fisica quantistica, Relatività, principio di Indeterminazione di Heisemberg in cui non è possibile determinare contemporaneamente posizione e velocità di un elettrone ( entra quindi in crisi il concetto di casualità = causa/effetto e prevedibilità del comportamento della natura)

Principio di falsificabilità

Popper e Kuhn introducono il principio di falsificabilità in cui per valutare una teoria si prevedono esperimenti che ne dimostrino la falsificabilità in contrapposizione al principio di verificabilità del circolo di Vienna in cui una teoria è scientificamente valida solo se sottoponibile a sperimentazione.

Se un esperimento è falsificabile è anche scientifico perchè più alto è il grado di falsificabilità tanto più alto è il suo contenuto empirico e cioè tanto maggiori sono le informazioni intorno a quella realtà ( esempio : nessuno può dimostrare con prove positive che "tutti i cigni sono bianchi" mentre si può dimostrare con un solo caso negativo che "esistono cigni che non sono bianchi"

Una teoria non falsificabile non è scientifica perchè è una tautologia.

Teoria dei tre mondi

Popper identifica il divenire scientifico con tre mondi sempre più complessi :

Mondo 1 = insieme di oggetti fisici dell'universo

Mondo 2 = insieme degli stati mentali e conseguenti comportamenti -funziona da raccordo tra il mondo 1 e 2 che non riescono a correlare tra loro

Mondo 3 = mondo delle teorie, dei componimenti , della poesia, dell'arte ( vere o false)

Deduzione : se dunque è vero che una teoria scientifica(mondo 3) si realizza sempre con una mediazione (o compromesso) legata alla soggettività di chi la realizza (mondo 2) ovvero se una teoria scientifica (mondo 3) nasce non da semplici dati(mondo 1) ma da una elaborazione personale di dati (mondo 2)

allora si capisce il significato di autocorrettività delle scienze e con il superamento del neopositivismo si introducono criteri di verifica nelle procedure di controllo della ipotesi scientifica che non potendo essere oggettivi( mondo 3 che non può contattare mondo 1) e nemmeno soggettivi( non ha senso un criterio soggettivo nel metodo scientifico) sono intersoggettivi.

**Docente Don Pierluigi Pizzamiglio**

**DOMANDA e oggetto della relazione: Che sensu ha e come di può introdurre la dimensione storica nell'insegnamento scolastico della matematica.**

Se si pone crudelmente la domanda in oggetto al chimico con infarinature epistemologiche (e cioè con sue personali convinzioni sulla teoria generale della conoscenza scientifica e dei fondamenti e criteri del sapere ) con esperienza didattica da esordiente nell'insegnamento della chimica industriale e organica : estro e gusto del paradosso solleticherebbero lo spirito del neofita, (soprattutto se il neofita e chimico è lo stesso che scrive) ad una risposta legata alle ermetiche letture fatte in giovinezza sull'alchimia, e su quanto siano connesse alla scienza , vita e spirito dell'uomo.

Matematica e chimica, scienze l'una assiomatica, l'altra sperimentale, hanno una dimensione storica il cui senso può essere introdotto nell'insegnamento soprattutto quando si debba superare il concetto di verificabilità con l'introduzione del criterio di falsificabilità.

Dunque ,in una prima affrettata risposta alla domanda su quale sia il senso dell'insegnamento della storia nella scienza, penso non si debba sottovalutare il peso che può avere la narrazione del passato e la ricostruzione storica nel riappropriarsi del **piacere della conoscenza , del sapere come scoperta anche faticosa che induce alla riflessione creativa, formale e critica** (ricordando che la creatività dello scienziato non sta nella esposizione ma nei contenuti).

Eliminato dalla scienza ogni problema metafisico (fisicalismo), espressi i concetti in funzione di operazioni logiche, matematiche, sperimentali (operazionismo), fissato che è l'esperienza la base di ogni conoscenza (empirismo,neopositivismo) e giudicata valida una teoria non solo sulla sua dimostrabilità ma sulla sua resistenza ai tentativi di falsificazione (falsificazionismo di Popper)

Si potrà impostare in classe un programma in cui alla:

- definizione dei concetti ,
- applicabilità teorica nel calcolo, astrazione
- applicabilità pratica con l'esperienza di laboratorio,

si possa attraverso un percorso di tipo storico arrivare a comprendere il significato dei simboli, delle convenzioni, della logica del pensiero Pitagorico, della limitatezza delle intuizioni e generalizzazioni, del profondo valore del metodo della analisi.

Un atteggiamento critico verso la scienza del passato, attraverso la sua evoluzione, e la scoperta di problemi complessi e elaborazione di formule sintetiche , servirebbe allo studente a raggiungere : ***sensibilità e consapevolezza*** sia scientifica che storica , dunque la storia intesa come un fondamentale **valore FORMATIVO** a completamento del rigore didattico imposto dai programmi.

Se formare significa capire e farsi capire , per formare serve metodo: ad esempio parlare di **geometria analitica** significa parlare di Cartesio ,metodo cartesiano della scoperta (ars inveniendi) e sua differenza col metodo euclideo della parola ( ars demonstrandi dove il rigore matematico è legato ai sillogismi e alla retorica) .

Parlare di metodo significa far riferimento a Galileo Galilei (la cui più sensibile innovazione di G. rimane comunque l'aver assegnato al termine *esperienza* il significato di esperimento attivo, in antitesi a quello di semplice osservazione ) e quindi introdurre Popper

(fortemente critico verso lo storicismo che ipotizza leggi all'interno del divenire storico e proponendo in alternativa un approccio 'aperto', costantemente modificabile in dipendenza dalla realtà e chiuso a ogni tentazione di determinismo. come prevede il metodo induttivo.)La storia può chiarire i concetti di equivalenze in Euclide e le differenze in Leibnitz

Parlare di storia della matematica significa introdurre i seguenti concetti :

- Sviluppo diacronico e contestuale o contemporaneo (datazione e cronologia ad esempio 1,3,2,1,2 è lo sviluppo anagrafico temporale del metodo mentre 1,2,3,1,2 può considerarsi sviluppo logico. Parlare di storia della matematica significa anche capire il primo metodo di calcolo assiro babilonese(1), o il metodo greco(3) in cui l'algebra viene assimilata alla geometria (geometria euclidea), o il metodo arabo(2) in cui vengono fissate le regole specifiche , o il metodo del'500 italiano (1) in cui nuovi problemi vengono risolti, o il metodo Cartesiano (1600) (2) in cui si sviluppa la geometria analitica. La storia della matematica non deve servire per rendere più semplici le teorie matematiche. Due modi sbagliati d'uso della storia: 1)Far coincidere la storia con gli aneddoti è un errore mentre si possono ricordare i paradossi come quello di Zenone; 2)Insegnamento per sostenere le proprie idee,ideologie o manie (ad usum delphini) è un uso STRUMENTALE della storia mentre la storia deve essere funzionale all'educazione di una sensibilità storica.
- Biografie : dalla semplice biografia del matematico si può passare alle sue opere e al suo pensiero La biografia non deve coincidere con gli aneddoti,il pettegolezzo, approssimazioni, sentito dire, presunta esattezza, ma deve servire a capire la cronologia, il metodo storico, il rapporto col passato, serve a chiarire storicamente, a spiegare come sono andate effettivamente le cose.
- Opere : dal titolo ,data, indice si passa a capire la struttura logica dello scritto e del pensiero
- Temi, argomenti : un argomento può essere trattato in prospettiva storica (prospettiva sistematica o prospettiva storica)
- Musei e mostre :

## Presentazione della Tesi d'esame per la Specializzazione

La ricerca di soluzioni **ottimali** da diversi punti di vista può essere variamente denominata **ottimizzazione**, programmazione matematica lineare o non lineare, pianificazione ,scelta, ricerca operativa decisionale , economica e tecnologica.

Spesso la specificità degli obiettivi scolastici per singola disciplina, la mancanza di modelli metodologici o forse anche la poca disponibilità di tempo, non lasciano spazio ad una valutazione trasversale e multidisciplinare dei concetti di elaborazione programmatica e ricerca di soluzioni **ottimali** al fine di realizzare ,nel futuro perito, un obiettivo formativo più alto del solo fine professionalizzante .

### L'ottimo a scuola

Nella scuola media superiore la matematica affronta il problema da un punto di vista squisitamente teorico con scarsi esempi e ciò è previsto sia al biennio con un accenno e ripreso al quinto anno nel quale scelta, programmazione lineare e ottimo si trovano sempre al termine di un percorso didattico ( per istituti professionali :geometria, insiemi numerici, goniometria e trigonometria, matematica finanziaria, statistica, analisi infinitesimale, informatica , applicazione all'economia : scelte in condizioni di certezza e certezza, ottimizzazione dei problemi a più variabili); per istituti tecnici : disequazioni, funzioni, numeri complessi, sistemi lineari, algebra dei limiti, funzioni, derivate di funzioni,

integrali, massimi e minimi, flessi, studio di funzione, equazioni differenziali, problemi di scelta in condizioni di certezza e incertezza, programmazione lineare ).

Appare chiaro come una simile proposta risulti spesso insufficiente nella realizzazione dell'obiettivo didattico trasversale che si proponga di realizzare un modello di comprensione globale della ricerca dell'ottimizzazione di un processo, che può essere indifferentemente di tipo industriale, economico, urbanistico, scientifico di base, epistemologico( e ciò con eguale dignità per ognuno di essi e nella relazione tra essi)La comprensione della problematica della ottimizzazione di procedure processi, problemi vari essendo un tema trasversale in un Istituto Tecnico andrà prevista in un percorso di avvicinamento . La matematica ha la funzione di fornire un contributo teorico attraverso la costruzione di certi modelli risolutivi di certe situazioni. Introdurre a partire dai primi anni alcuni esempi di problemi semplici e di modelli semplici di schematizzazione e soluzione può costituire una base interessante per comprendere anche i modelli di complessità assai più elevata che si affrontano poi negli ultimi anni. In questo lavoro si privilegerà un percorso didattico inserito in un ciclo scientifico -tecnico-tecnologico più propriamente specifico per periti chimici industriali

### **L'ottimo per il futuro tecnico**

Spesso accade che il tecnico conosca alla perfezione norme e procedure scientifiche, le sappia applicare in un progetto complesso come ad esempio un impianto di tecnologia industriale, oppure programmi di sviluppo economico ,urbanistico... ma dia scarso valore alle conseguenze del loro dimensionamento e impatto ambientale.(quanti tecnici , usciti dalle nostre scuole, giuravano sulla sicurezza delle centrali nucleari, sulla bontà di alcune solide economie , sulla necessità di" risanamenti" di vecchi quartieri cittadini.)

### **L'ottimo dalla parte dell'insegnante**

Accade anche che l'insegnante di matematica e l'insegnante di chimica ( abili nelle loro competenze " di nicchia" ) siano meno incisivi nel porsi traguardi didattici pratici di tipo

trasversale e necessari nello studio delle materie professionalizzanti il cui percorso arricchirebbe nell'ottica della multidisciplinarietà (contributo all'arricchimento della disciplina ) e nella prospettiva di futura collaborazione interdisciplinare (interazione nella disciplina)

### **L'ottimo come obiettivo nella didattica**

Dunque maggior peso nella didattica della ricerca dell'ottimo ,per affinare abilità e nuove e maggiori competenze nel più ampio e globale contesto di una dinamica produttiva che vive le interazioni economiche ma è anche sottoposta a vincoli sociali e territoriali .

Gli obiettivi per lo studente futuro perito (chimico capo tecnico) potrebbero essere così sintetizzati :

conoscere gli aspetti epistemologici e storici che hanno condotto alla individuazione e formalizzazione del concetto di ottimo

saper applicare il concetto di ottimo in una realtà industriale collegandolo al concetto di dimensionamento dell'impianto per poterne valutare le potenzialità di produzione

saper applicare il concetto di ottimo in una realtà industriale collegandolo al concetto di economicità per poterne valutare le potenzialità di mercato

*saper analizzare il concetto di ottimo in una realtà industriale che integrata nel territorio debba tener conto del concetto di sviluppo sostenibile*

## **Alla ricerca dell'ottimo**

Si potrà definire **ottimizzazione** :

**1** Individuazione di quella soluzione di un problema che comprenda i massimi vantaggi e i minimi rischi.

**2** Procedimento di ricerca *del valore ottimo ( o valore ottimale)* di una funzione in presenza di uno o più vincoli, attraverso l'impiego di metodi matematico - statistici

Nella programmazione matematica, tramite strumenti analitici e geometrici si studiano i metodi di ricerca di massimi e minimi di una funzione (detta *obiettivo*); e di ottimizzazione di tale funzione che può essere programmazione *lineare* (la più diffusa) o *non lineare* .

I punti di massimo e di minimo sono così descritti *per una funzione reale di variabile reale*

*"sia  $f(x)$  una funzione di dominio  $A$ , un punto  $c$ , interno ad  $A$ , si dice punto di massimo:*

*relativo per  $f(x)$ , se esiste un intorno  $I$  di  $c$  contenuto in  $A$ , tale che  $f(x) \leq f(c)$  per ogni  $x$  appartenente a  $I$*

*assoluto per  $f(x)$  se  $f(x) \leq f(c)$  per ogni  $x$  appartenente a  $A$*

E l'eleganza del teorema di Weierstrass ci offre un razionale sul valore obiettivo del massimo e minimo come elementi semplici ma identificativi di qualsivoglia sistema (funzione) dal più semplice al più complesso .Una semplificazione del teorema è ben espressa in ( rif.13)

*" Ogni funzione continua, in un dominio limitato chiuso, assume in esso il suo valore più grande e quello più piccolo "*

E più ampiamente espressa(In rif.14)

"Se  $f(x)$  è una funzione reale definita in un sottoinsieme **limitato**  $D$  di  $R$ , esiste nella chiusura  $\bar{D}$  di  $D$  **almeno** un punto  $\xi$  in **ogni** intorno del quale l'estremo superiore di  $f(x)$  coincide con l'estremo superiore che la  $f(x)$  ha in **tutto**  $D$ ; ed esiste **almeno** un punto  $\eta$  in **ogni** intorno del quale l'estremo inferiore della  $f(x)$  è uguale a quello che la funzione ha in **tutto**  $D$ "

## Evoluzione storica del problema dell'ottimo

Nell'estate del 1949 all'Università di Chicago la Cowles Commission for Research in Economics promosse una conferenza nella quale economisti, matematici, e statistici presentarono i risultati di ricerche utilizzando strumenti di Programmazione Lineare. Si andava dalla programmazione della rotazione delle colture alla pianificazione di azioni militari su grande scala, dalla organizzazione delle rotte delle navi fra i porti alla valutazione dei flussi di prodotti fra le industrie. L'esigenza di un tale tipo di lavoro nacque (Fourier nel 1823 aveva elaborato un modello di PL) e si sviluppò durante ed immediatamente dopo la Seconda Guerra Mondiale perfezionandosi in una struttura matematica e un metodo computazionale definito ALGORITMO del SIMPLESSO, precursore all'avvento dei primi calcolatori elettronici

La Seconda Guerra Mondiale testimoniò lo sviluppo di una pianificazione (e elaborazione di una tecnica scientifica di programmazione) su grandissima scala in tutto l'apparato militare statunitense (U.S. Air Corps) e in alcuni settori civili.

Durante la guerra l'Air Staff, nel 1943, creò una funzione di program monitoring sotto la guida del Professor E.P. Learned di Harvard. : il programma, iniziò con il piano in cui erano contenuti tutti gli obiettivi del tempo di guerra , fu elaborato attraverso stadi successivi con una organizzazione dei processi di pianificazione e costante elaborazione dei dati raccolti

Dopo la Seconda Guerra Mondiale si comprese la necessità del coordinamento, attraverso una tecnica di programmazione scientifica delle risorse a disposizione. rendendo realizzabile: lo sviluppo degli elaboratori elettronici, e di un modello inter - industriale, inteso come il metodo di descrizione delle relazioni fra le industrie in una data economia, dovuto a Wassily Leontief, e descritto con l'uso di funzioni di produzione lineare nella descrizione delle attività industriali

La generalizzazione dell'approccio inter-industriale che estese l'applicabilità a realtà di relazioni complesse tra industrie rese necessario lo sviluppo di un modello di programmazione lineare ( luglio 1947) con il metodo del Simplex. ( l'Air Force sponsorizzò un lavoro del U.S. Bureau of Standards su elaboratori elettronici e tecniche matematiche per risolvere questo tipo di modello)

Si sviluppa il concetto di **ottimizzazione** nella sua accezione più moderna : Nel giugno del 1947 nacque a questo scopo un primo gruppo di ricercatori (I principali membri di questo gruppo furono: M.Wood, G.B. Dantzig, J. Norton, M. Geisler) battezzato ufficialmente con il nome Project SCOOP (Scientific Computation of Optimum Programs).

Negli anni cinquanta la P.L. entrò in largo uso nel settore industriale e, data la complessità del procedimento ( per metodo ed elevato n° di variabili), essa trovò un buon campo di applicazione nella ricerca operativa aziendale più che nel campo della macroeconomia ( esempio problemi di trasporto, gestione scorte magazzino, combinazione di fattori di produzione, problemi di strategia bellica ecc.)

Dunque programmazione lineare come problema di scelta genericamente caratterizzato da una funzione obiettivo lineare soggetta a vincoli ( disequazioni o equazioni) anch'essi lineari di primo grado e inquadrato nell'ampio contesto della "ricerca operativa".

Ricerca operativa : scienza che studia metodi e strategie da proporre a coloro che devono operare una scelta ovvero prendere decisioni sia in situazioni certe che incerte. Per la formalizzazione di un problema di ricerca operativa esistono metodologie più propriamente teoriche quali :

1. individuare la funzione obiettivo e i punti di **ottimo**,
2. individuare le "variabili d'azione" da cui dipende la funzione obiettivo,
3. individuare i vincoli ( disequazioni o equazioni) che limitano le variabili d'azione ( i vincoli possono essere di segno es  $x_1 > 0$  o tecnici ad esempio disponibilità di risorse, esigenze di mercato..),
4. racchiudere il sistema dei vincoli nella cosiddetta " area ammissibile o campo di scelta" nella quali si trovano tutte le possibili soluzioni e anche quelle che **ottimizzano** la funzione obiettivo

oppure metodologie di tipo pratico :

1. preparazione : ,definizione del problema , degli obiettivi e raccolta dei dati statistici
2. Impostazione : studio dei fattori costanti e variabili , esame delle alternative, elaborazione di un modello
3. Elaborazione : scomposizione analitica, applicazione, procedimenti matematici
4. Verifica : applicazione e controllo

La complessità delle applicazioni è tale che è impossibile darne un quadro completo : mi limiterò ad accennare ad alcuni campi di applicazione (volutamente disgiunti per meglio sottolineare l'unicità del modello di riferimento )

In economia i contatti tra T. Koopmans della Cowles Commission, R. Dorfman, e economisti quali P. Samuelson, diedero inizio ad un'epoca di intensa revisione delle teorie economiche classiche usando i risultati e le idee della programmazione lineare:

Nelle scienze matematiche Il contatto con J. Von Neumann al Institute for Advanced Study, diede fondamentali intuizioni sulla teoria matematica e accese l'interesse di A.W. Tucker della Princeton University e dei suoi studenti, che affrontarono i problemi della teoria della disuguaglianza lineare e della teoria dei giochi. Senza trascurare la prospettiva dell'ottimo vista attraverso le scienze statistiche e probabilistiche.

Nelle tecnologie chimiche industriali (rif.6,rif.7) modelli sono stati proposti nella determinazione dello spessore degli isolanti , rapporto di riflusso economicamente più conveniente in colonne di distillazione, economia nel numero degli effetti in un sistema di evaporatori, ...)

Nelle scienze urbanistiche Nascono i modelli di pianificazione che esaminano la sensitività delle soluzioni al variare di parametri, vincoli e criteri. Esempio il Modello di Schlager( rif.8) (1956): studia la destinazione ottimale delle aree o unità di riferimento in cui è suddiviso il suolo, secondo espliciti criteri di ipotesi alternative applicate ad ogni area , alla quale sono assegnate funzioni mutuamente compatibili( residenziali, produttive, di servizio...) .Modello dei percorsi minimi studia la localizzazione ottima dei servizi e minimizzazione dei costi di trasporto ( Weber) . Modello di sviluppo sostenibile

In filosofia : Un moderno dibattito critico sul concetto di "scelta" si sviluppa con Bachelard e Popper il quale estendendo la sua concezione alla storia e alle scienze sociali, si mostra fortemente critico verso la possibilità di individuare delle leggi all'interno del divenire storico e proponendo in alternativa un approccio 'aperto', costantemente modificabile in dipendenza dalla realtà e chiuso a ogni tentazione di determinismo. Segue Friedmann il quale studia il concetto di complessità e lo inquadra nei continui mutamenti della società e nell'aumento della frequenza di questi. La complessità può temperarsi intervenendo sulla interazione continua tra variabili e vincoli nell'ambiente e nel sistema sociale interessato ad esempio dalla fine della società di classe; migrazioni di massa; erosione del territorio sia fisica che culturale; spinte competitive; internazionalizzazione del capitale; trend demografico

indirizzi

In Italia è attivo il Centro per la Ricerca Operativa presso l'Università Bocconi di Milano, e l'Associazione Italiana di Ricerca Operativa istituita in Roma nel 1961.

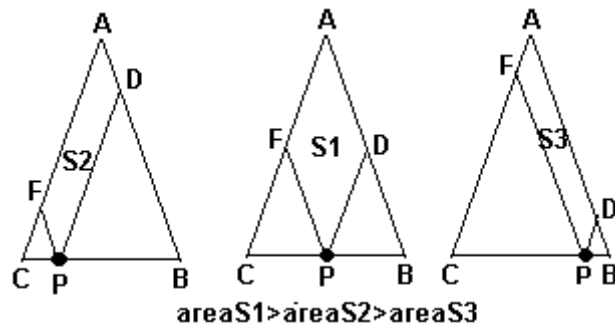
- CIRO - Centro Interuniversitario per la Ricerca Operativa, Università degli Studi di Firenze.
- AIRO - Associazione Italiana di Ricerca Operativa
- Italian Domain Survey a cura di Audipress Communications Svcs. •Ricerca Operativa - Gruppo di Pisa
- Ricerca Operativa - Gruppo di Perugia
- A.I.R.O - the Italian Association for Operations Research
- U.M.I. - Unione Matematica Italiana. Dipartimento Istruzione Universitaria of MURST (The Italian Ministry for University and Research) MURST
- the International Federation of Operations Research and Management Science



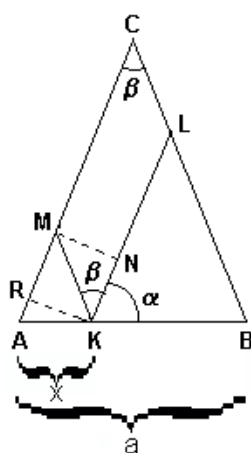
# L'ottimo : prime intuizioni

- Secondo lo storico Cantor (citato a proposito in rif.11), la più antica questione di massimo espressa consapevolmente si trova nella proposizione 27 del libro VI degli "Elementi" di Euclide(300a.c.) e opportunamente modificata può essere espressa nella forma seguente :

*"dato un triangolo isoscele ABC, se ad un punto P della base BC si conducono le parallele PD ad AC e PF ad AB , l'area del parallelogramma ADPF è massima quando P è il punto medio di BC"*



che è possibile dimostrare:



$$\hat{A}CB = \hat{M}KL = \beta$$

$$\hat{C}AB = \hat{L}KB = \alpha$$

$$\overline{KL} = \frac{\overline{KB}}{2 \cos \alpha} = \frac{\overline{KB}}{2 \cos \alpha} = \frac{a-x}{2 \cos \alpha}$$

$$\overline{RK} = x \sin \alpha$$

$$\text{area KMCL} = \overline{KL} \cdot \overline{RK} = \frac{a-x}{2 \cos \alpha} x \sin \alpha$$

posso anche calcolare l'area da

$$\overline{MN} = \overline{MK} \sin \beta = \frac{x}{2 \cos \alpha}$$

$$\text{area KMCL} = \overline{KL} \cdot \overline{MN} = \frac{a-x}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{x}{2 \cos \alpha} \sin \beta =$$

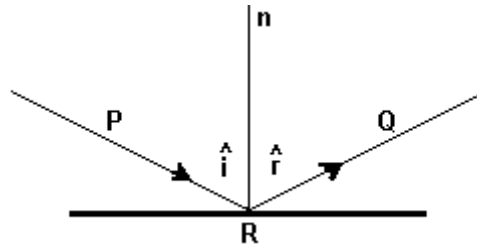
ne concludo che  
 $\text{area KMCL} = (a-x) x \cdot \text{costante}$

la derivata prima che sarà  $= (a - 2x) \cdot \text{costante}$ , si annullerà  
 nel suo punto massimo assumendo  $x$  il valore di  $x = a/2$

- Altri elementi di massimo e minimo classici sono (**Zenodoro** 200a.c.?):
  - il prodotto di due numeri reali è massimo quando i due numeri sono uguali tra loro
  - tra i triangoli a uguale perimetro, il triangolo equilatero ha area massima
  - tra tutti i triangoli rettangoli di data ipotenusa, l'isoscele ha area e perimetro

massimo

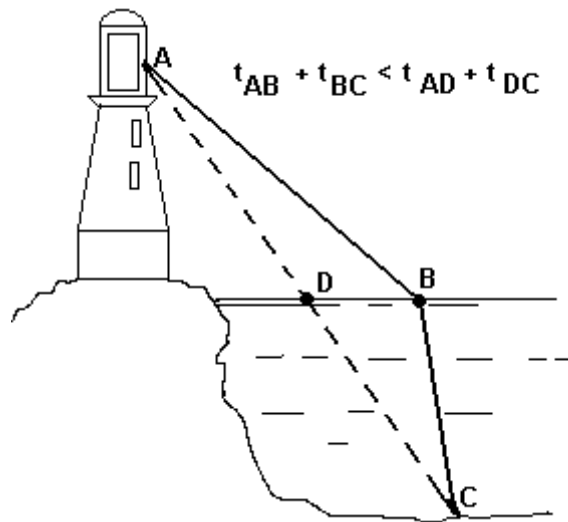
- tra tutti i triangoli di perimetro dato, l'equilatero ha cerchio iscritto di area massima ( e cerchio circoscritto di area minima)
  - tra i quadrilateri convessi di dato perimetro, il quadrato ha area massima
  - tra tutti i poligoni convessi aventi perimetro assegnato, quello regolare ha area massima.
  - Tra tutti i parallelepipedi di superficie assegnata il cubo ha volume massimo
- Medesimi concetti furono applicati da **Erone di Alessàndria** (sec. I a.C.) Matematico e fisico greco. Questi descrisse in un'opera enciclopedica una grande quantità di invenzioni e in ottica formulò le leggi della riflessione ipotizzando che la luce segua il minimo percorso. Dunque : nella riflessione di un raggio di luce su uno specchio piano la condizione che l'angolo di incidenza sia uguale all'angolo di riflessione è equivalente al fatto che il cammino PRQ sia di minimo



- Gli studi di **Pierre de Fermat** (Beaumont-de-Lomagne 17.8.1601 - Castres 12.1.1665) sui massimi e minimi si possono considerare la prima trattazione del calcolo delle variazioni, da lui applicato allo studio della riflessione e rifrazione della luce. Il **principio di Fermat** (1650) è il principio generale dell'ottica geometrica per cui un raggio luminoso procedendo da A a B segue il cammino che richiede il minor tempo possibile (o massimo o stazionario); (tutte le leggi dell'ottica geometrica (riflessione e rifrazione della luce, ecc.) ne sono una diretta conseguenza (Willebrod Snell (1591 - 1626) scopre sperimentalmente la legge della riflessione dedotta dalla teoria corpuscolare della luce di scuola pitagorica, riproposta con criteri diversi da Galileo , Renè Descartes (1596 - 1650) Cartesio ) e sostenuta da Newton e Leibniz (rif.5)
- Descartes in La Dioptrique (1637) suppone tra i primi che la luce si propaghi più rapidamente nel vetro che nell'aria da cui la rifrazione( teoria corpuscolare) , mentre Fermat parte dall'ipotesi opposta e giunge curiosamente allo stesso risultato con una logica che può essere ben espressa dai seguenti esempi

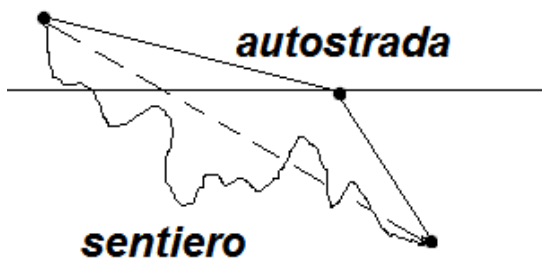
#### 1) Esempio del faro

Il raggio per raggiungere C segue il percorso naturale ABC ; per quale motivo non segue il percorso diretto ADC? Si potrebbe spiegare il paradosso affermando che nell'acqua la luce si propaga con minor velocità che nell'aria e dunque il raggio luminoso impiegherà meno tempo a percorrere ABC perché minore sarà il tempo da B a C rispetto al tempo da D a C



## 2) esempio del percorso stradale

applicando il principio di Fermat ad un percorso stradale costituito da autostrada in pianura nel primo tratto e da strada di montagna nel secondo sarà evidente che



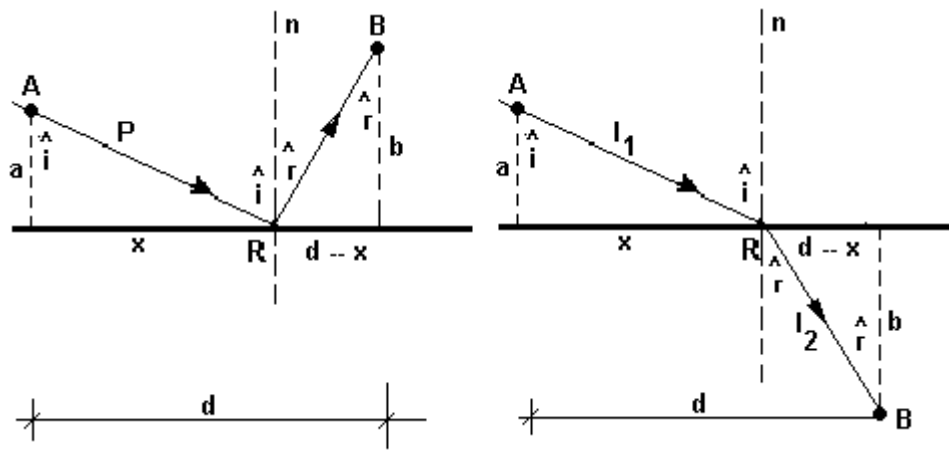
sarà più vantaggioso seguire il cammino più lungo se, per la maggior parte del percorso, posso fare autostrada (  $AR > AR'$  ) che permette tempi di percorrenza minori a maggior velocità  $v$ .

Il principio di Fermat viene spesso enunciato al momento della dimostrazione della legge della riflessione o rifrazione nella quale si definisce il percorso totale del raggio luminoso e si annulla la sua derivata nel punto minimo ( o massimo o stazionario), dimenticando che il concetto di derivata nasce con il calcolo infinitesimale ( sviluppato da Newton e Leibnitz) in tempi più tardi.

Dunque dalla classica dimostrazione della riflessione e rifrazione scaturirà valutazione sulla tendenza del raggio luminoso a scegliere un percorso "**ottimo**"; successivamente sarà interessante passare a esempio di metodo usato nel 1600 in alternativa al metodo della derivata e successivamente valutare alcuni problemi di **ottimo** che possano chiarire meglio una possibile applicazione del concetto di **ottimizzazione** di semplici problemi pratici .

-

Riflessione e rifrazione :



Riflessione (rif 12) : ricavo il percorso totale I da A a B , annullo la derivata e scopro che la riflessione prevede un percorso "**ottimo**" in cui gli angoli di incidenza  $i^\wedge$  e riflessione  $r^\wedge$  sono uguali e ciò in accordo al principio di Fermat

$$I = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$$

quando  $\frac{dI}{dx} = 0$  sarà'  $\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$

e quindi  $\sin i^\wedge = \sin r^\wedge$  da cui  $i^\wedge = r^\wedge$

Rifrazione : il tempo di percorrenza da A a B sarà  $t = I_1/v_1 + I_2/v_2$  ( dove v rappresenta la velocità) , e per il principio di Fermat I deve essere minimo ( o massimo o stazionario) e questo avviene in  $dI/dx = 0$

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2}$$

la funzione diventa minima azzerandone la derivata

da cui :

$$\frac{2x}{2v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{2(d-x)}{2v_2\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

semplificando :

$$\frac{x}{v_1 I_1} = \frac{(d-x)}{v_2 I_2} \quad \text{cioè} \quad \frac{I_1 \sin i}{v_1 I_1} = \frac{I_2 \sin r}{v_2 I_2}$$

e semplificando ulteriormente giungo alla relazione  $\sin i \sin r = v_1 v_2 = n$

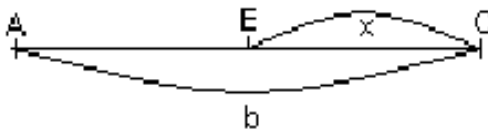
E questa è l'espressione matematica della riflessione definita principio anche di Descartes, sperimentalmente dimostrata da Snell ( Snellius) ma sicuramente legata al generale principio di Fermat che ancora una volta sottolinea come tra le varie ipotesi di percorso luminoso del raggio vi sia quella in cui esso risulti minimo con valori diversi a seconda della natura del mezzo .

Dalla fisica alla geometria a semplici problemi geometrici di matematica applicata

L'elegante metodo di Fermat ( vissuto in un periodo precedente alla definizione del concetto di derivata) può essere riproposto con l'esempio seguente <sup>(3)</sup> :

## PROBLEMA N°1a

PROBLEMA : Dividere il segmento AC in modo che AE x EC sia massimo



Fissato  $AE=b-x$  e  $EC=x$  deve essere massimo  $AE \cdot EC=(b-x) \cdot x=bx-x^2$   
immaginando di aggiungere e togliere un numero infinitamente piccolo e ai segmenti studiati avrò :

$$AE-e \cdot EC+e = (b-x-e) \cdot (x+e)=bx+be-x^2 -2ex-e^2$$

perchè questo sia massimo sarà uguale al precedente e cioè

$$bx+be-x^2-2ex-e^2 =bx-x^2$$

$$be = +2ex+e^2$$

dividendo per e

$$b = +2x+e$$

sopprimendo e perchè infinitamente piccolo

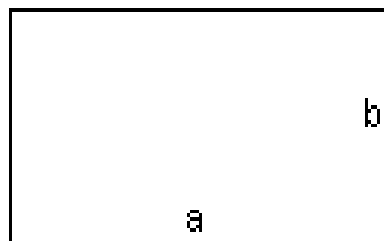
$$b = +2x$$

Usando le derivate si potrebbe scrivere così:

Trovo il massimo per la funzione  $bx-x^2$  in modo che la sua derivata si annulli , dunque  $b-2x=0$  e quindi  $b=2x$

## PROBLEMA 1b :

Allo stesso modo posso immaginare quale tra diversi rettangoli con lo stesso perimetro sia quello con superficie più grande



$$p=2a+2b \text{ quindi } b= \frac{p-2a}{2}$$

$$S=ab \text{ quindi } S = a \frac{(p-2a)}{2}$$

valuto S funzione di a  $S = \frac{ap}{2} - a^2$

la derivata di S funzione di a sarà  $S' = \frac{p}{2} - 2a$

quando S è massimo la sua derivata si annulla  $\frac{p}{2} - 2a = 0$

e quindi  $p = 4a$

Sostituendo a  $p = 2a + 2b$  ottengo  $2a+2b = 4a$  e quindi  $b = a$  ( il parallelogramma è quadrato)

## PROBLEMA 2

Se capovolgo il problema e cioè calcolo quale tra i diversi rettangoli a stessa superficie ha

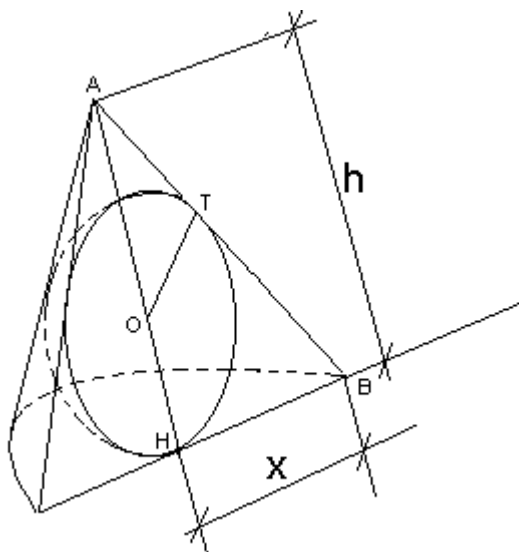
il perimetro più piccolo sostituisco il valore di  $b = S/a$  al perimetro  $p = 2a + 2b = 2a + 2S/a$ .

La derivata del perimetro funzione di  $a$  sarà  $p' = 2 - 2s/a^2$  e al suo valore minimo sarà  $= 0$   
 $2 - 2s/a^2 = 0$  e  $S = a^2 = ab$  dunque  $a = b$  ( il parallelogramma è quadrato)

(Un problema di questo tipo può essere utile per mettere in relazione le intuizioni di Fermat, le derivate e il problema degli isoperimetri di Zenodoro : tra tutti i poligoni di uguale perimetro con  $n$  lati, è massima l'area di quello regolare)

### PROBLEMA N°3

Si determini l'altezza e il raggio base del cono di volume minimo circoscritto a una sfera di raggio  $r$ .



Poichè è  $h/x = AH/BH = AT/OT$

$$\frac{h}{x} = \frac{\sqrt{(h-r)^2 - r^2}}{r} = \frac{\sqrt{h^2 - 2hr}}{r}$$

Da cui si ricava  $h$

$$h = \frac{2rx^2}{x^2 - r^2}$$

Che sostituito nel valore del volume del cono circolare retto che è :

$$V = (\pi x^2 h)/3 = (2\pi r x^4)/3(x^2 - r^2)$$

Annullando la derivata

$$V' = 2x^3 (x^2 - 2r^2) / (x^2 - r^2)^2 = 0$$

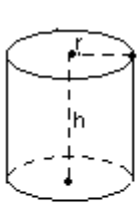
da cui il cono di volume minimo avrà

$$X = \sqrt{2}r \text{ con } h = 4r$$

### PROBLEMA N°4

Devo costruire un serbatoio che a parità di volume abbia minima superficie ( dunque meno

pesante , meno costoso, con minor superficie radiante se si tratta di un serbatoio petrolifero che debba mantenere una temperatura superiore alla temperatura ambiente)



Essendo il volume  $V = \pi r^2 h$  e quindi  $h = \frac{V}{\pi r^2}$

Essendo la superficie totale  $S_t$  e sostituendo

$$S_t = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + 2V \frac{1}{r}$$

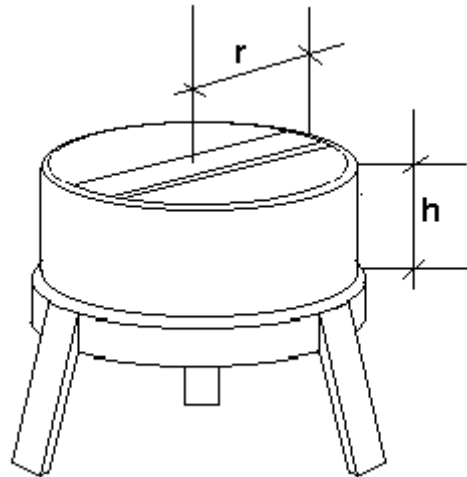
La variabile S rispetto ad r deve essere minima e cioè la sua derivata =0

$$S'_t = 4\pi r - 2V \frac{1}{r^2} = 0 \quad \text{e} \quad 4\pi r = 2V \frac{1}{r^2} \quad \text{e quindi} \quad 4\pi r^3 = 2V$$

e sostituendo  $V = \pi r^2 h$       $4\pi r^3 = 2\pi r^2 h$

ricavo  $2r = h$

**PROBLEMA N°5** Devo costruire un reattore a tino (1), aperto in alto , che a parità di volume abbia minima superficie ( dunque meno pesante , meno costoso)



Il problema , analogo al precedente ha risoluzione diversa quando sia prevista l'apertura in alto infatti

la superficie totale del tino aperto sarà

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = \pi r^2 + 2 \frac{V}{\pi r}$$

e questa sarà la funzione la cui derivata è da rendere =0  
nelle condizioni di minimo : dunque:

$$S' = 2\pi r + 2V \frac{-1}{r^2} = 2\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$$

e cioè :

$$2\pi r = \frac{2V}{r^2} \text{ semplificabile a } r^3 = \frac{V}{\pi} = \frac{\pi r^2 h}{\pi}$$

da cui

$$r = h$$

## L'ottimo : cenno ai problemi di scelta in condizioni di certezza

I problemi di scelta rientrano nella disciplina cosiddetta della Ricerca Operativa nella quale vengono studiati metodi e strategie in cui si debba operare una scelta ovvero prendere decisioni sia in situazioni di certezza che di incertezza.

### PROBLEMA N°6

Un impianto di distillazione sostiene un costo fisso settimanale di £ 900.000 , un costo di £ 150 per ogni litro di prodotto distillato e un costo aggiuntivo, pari al 10 % del quadrato della quantità prodotta, per smaltimento dei residui della distillazione considerati rifiuti speciali secondo Dlgs 22/97(decreto Ronchi)

Considerando x la quantità prodotta settimanalmente ,

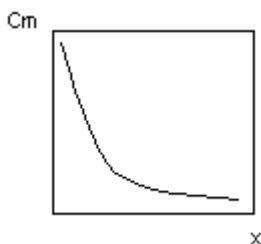
il costo totale settimanale sarà :

$$C = 900.000 + 150 x + 0,1 x^2$$

e il costo medio evidentemente sarà :

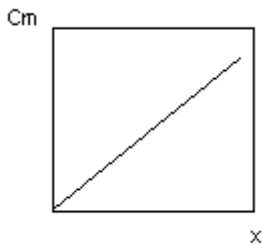
$$C_m = (900.000 + 150 x + 0,1 x^2) / x = (900.000/x) + 150 + 0,1x$$

Sarà possibile portare in grafico una tale funzione immaginando di costruire la curva relativa a  $C_m = f(900.000/x)$

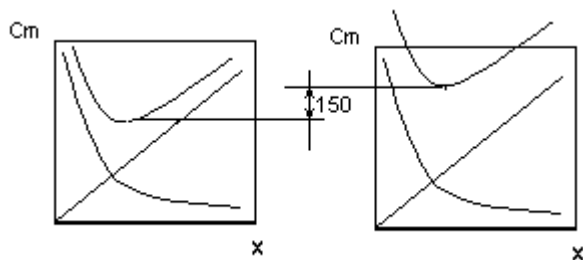


La curva relativa a  $C_m = f(0,1 x)$

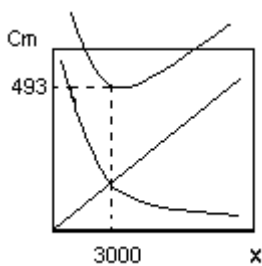




la curva risultante dalla somma delle due funzioni in un unico grafico in cui possa avvenire la opportuna traslazione relativamente al valore di 150



Dal grafico si vede che il minimo di costo medio  $C_m$  si ha in corrispondenza del punto di incontro delle due funzioni  $0,1x$  e  $900.000/x$  dunque  $0,1x = 900.000/x$  da cui  $x = 3000$  e il costo medio al litro sarà  $C_m = 493$  £



## PROBLEMA N°7

### premessa

Come si sa, la distillazione non porta alla netta separazione dei componenti della miscela iniziale a meno di non ripetere più volte le operazioni che sono alla base dei processi stessi (distillando e ridistillando per più volte uno stesso prodotto si può arrivare a ottenere un composto puro); la moderna industria ha realizzato una apparecchiatura che racchiude in se tutti gli stadi di una sequenza significativa di distillazioni detta colonna di rettifica.

Il principio in se è abbastanza semplice in quanto una parte del liquido distillato viene reimmesso nella stessa colonna per successive operazioni di distillazione: il rapporto di riflusso  $R$  è il rapporto tra la quantità  $O$  di liquido che ritorna in colonna per subire una nuova distillazione e la quantità  $D$  che viene prelevata come distillato.

Dunque la scelta andrà fatta tenendo conto che maggiori sono le distillazioni migliore è la qualità del prodotto; contemporaneamente maggiori sono le distillazioni maggiori sono i costi di esercizio e quindi l'ottimo delle condizioni di lavoro si otterrà in una situazione operativa intermedia indicata dal rapporto  $R$  che rappresenta la quantità di prodotto che si decide di ridistillare rispetto alla quantità di prodotto finito.

Dunque

$R = O/D$  sarà massimo quando  $O$  è massimo e dunque tutto il prodotto ritorna in colonna per successiva distillazione

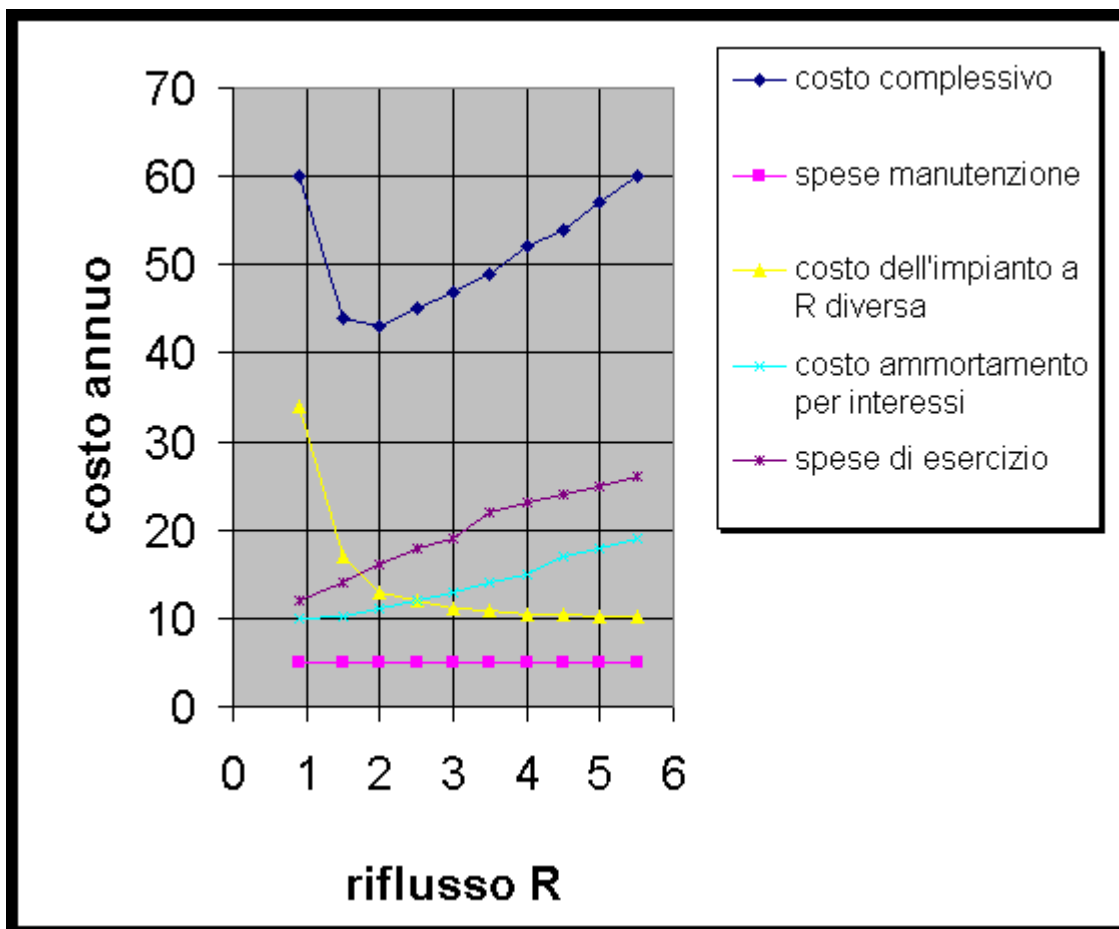
$R = O/D$  sarà minimo quando  $D$  è massimo e dunque tutto il prodotto viene prelevato senza ulteriore distillazione

### Obiettivo

Calcolare le condizioni di riflusso economicamente più conveniente in una distillazione per rettifica in cui

- le spese di manutenzione dell'impianto siano costanti al variare di  $R$
- il costo dell'impianto, relativamente agli interessi ed ammortamento della colonna, che ha valore infinito per  $R$  minimo e diminuisce all'aumentare del rapporto di riflusso,;
- il costo dell'impianto riguardo agli interessi e all'ammortamento che comportano il ribollitore e il condensatore (elementi indispensabili alla colonna di rettifica), costo che aumenta con l'aumentare di  $R$ ;
- le spese di esercizio (costo del combustibile per il ribollitore, acqua per il condensatore, energia necessaria per far funzionare la pompa di circolazione del riflusso) che aumentano con  $R$

Un esempio di elaborazione dei dati di spesa di manutenzione e esercizio e costi di diversi di impianto e ammortamento, riportati in grafico danno una sintesi grafica nella curva cosiddetta del costo complessivo di esercizio il cui punto minimo indica a quali valori di riflusso si debba operare per ottenere quel particolare prodotto a costi minimi



La risoluzione grafica per quel particolare esempio produttivo evidenzia che per avere un costo minimo dell'impianto esso deve lavorare con un riflusso effettivo di  $R = 2$

L'ottimizzazione dei processi industriali e della gestione dei processi chimici è attualmente demandato a programmi software per computer.

Un computer può essere programmato in modo da fargli gestire attivamente il processo e non solo affidandogli il semplice controllo delle variabili del processo.

Poiché le condizioni operative subiscono o possono subire variazioni con il passare del tempo, sarà opportuno considerare la necessità di variare il set point della variabile controllata (definito "set point" variamente come valore di soglia finalizzato a mantenere l'equilibrio, ovvero come "punto di ottimo" che nasce da una scelta ragionevole delle condizioni di esercizio in un ambiente in cui esiste un equilibrio tra condizioni di instabilità, l'operatore esterno può intervenire prendendo opportune decisioni oppure il calcolatore stesso interverrà sviluppando i dati per ottenere i migliori valori relativi al problema specifico realizzando una **ottimizzazione diretta**.)

Un semplice esempio di ottimizzazione diretta può essere individuato nella programmazione di un computer che, prevedendo future incrostazioni interne, elabori dati in tempo reale che garantiscano il funzionamento della apparecchiatura come se questa fosse nuova.

Un impiego del computer per tecniche di ottimizzazione delle risorse è la simulazione di nuovi processi o del futuro funzionamento di processi già in funzione.

Ottimizzazione diretta può avvenire con la cosiddetta "regolazione predittiva" in cui un processo nuovo, mai realizzato viene ridotto a modello matematico oppure il processo è già attivo e il conseguente modello matematico è rivolto a studiare le variabili del processo e sviluppare relazioni causa effetto. I modelli possono essere formati da equazioni differenziali o algebriche.

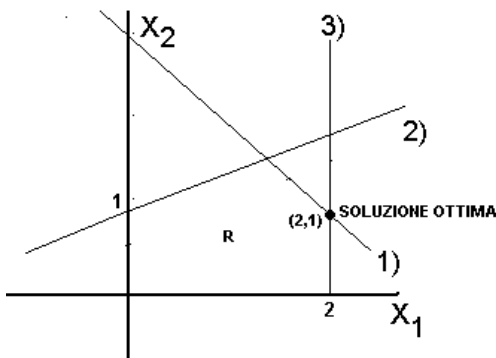
L'ottimizzazione è affidata in tempo reale ai cosiddetti terminali dell'hardware che principalmente sono costituiti da sistemi di controllo: tra questi i regolatori hanno la funzione di confrontare il segnale in arrivo con il set point (vedi precedente definizione) e di agire ottimizzando le prestazioni dell'impianto.

Detto  $x$  lo scostamento dal set point della grandezza misurata e  $y$  la variazione indotta dal controllore all'organo regolante, la regolazione potrà essere ad azione proporzionale ( $y = -kx$ ); ad azione integrale ( $dy/dt = -kx$ ); ad azione derivata ( $y = k dx/dt$ )

Dunque i meccanismi pratici di raggiungimento dell'ottimo possono essere **proporzionali** con spostamenti improvvisi e di breve durata ma non frequenti (aumenta istantaneamente → chiudo proporzionalmente), ad **azione integrale** per spostamenti piccoli e graduati che avvengano gradatamente nel tempo; ad **azione derivata** in cui la velocità di regolazione è proporzionale allo spostamento (aumenta istantaneamente → chiudo subito e tutto)

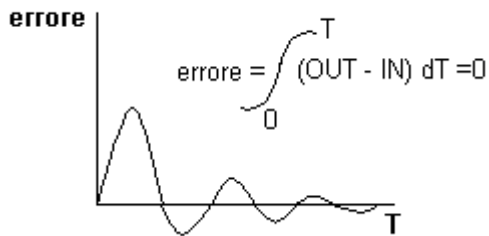
## PROBLEMA N°8

Valutazione dell'ottimo in un sistema di controllo dotato di retroazione (cioè dotato di un sistema di regolazione ovvero di un elemento che interponendosi al processo ne consenta una messa a punto costante, affidabile, precisa, e ciò misurando le informazioni in uscita per modificare opportunamente le condizioni di ingresso)

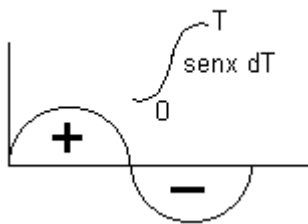


Valutare l'ottimo nella regolazione di un processo è valutare l'errore che si verifica nella retroazione che modificherà opportunamente il comando : sarà ottima la regolazione in cui l'integrale dell'errore si annulla :

( detto T il tempo necessario affinché il sistema si stabilizzi e dunque raggiunga il minimo errore )



( si potrebbe convenire non banalmente che l'ottimizzazione avviene ad annullamento dell'integrale e non ad annullamento dell'errore così come l'integrale di  $\sin x$  può tendere a 0 assumendo  $\sin x$  valori non nulli alternativamente positivi e negativi.)



un semplice esempio potrà aiutare a applicare un sistema di controllo di livello ad un reattore a tino come quello schematizzato nel problema n° 5



in questo caso l'errore è direttamente proporzionale al quadrato del tempo T e l'ottimo della regolazione sarà per un sistema di controllo che annulla l'errore in tempi minimi

# Cenni alle tecniche di programmazione lineare (scelte in condizioni di certezza)

Programmazione lineare riguarda particolari problemi in condizioni di certezza con effetti immediati caratterizzati da una funzione obiettivo lineare soggetta a vincoli ( disequazioni o equazioni) anch'essi lineari di primo grado.

Programmazione come costruzione di modelli di ottimizzazione in cui si minimizza o si massimizza una funzione detta funzione obiettivo lineare ( di primo grado) dipendente da un numero finito di variabili collegate tra loro da uno o più vincoli.

Questa parte introduce il concetto di modello matematico ben definito (in rif.11) come : *"sia T un insieme di elementi di natura qualsiasi e siano questi elementi legati tra di essi da determinate relazioni logiche. Si chiama modello di T un insieme T' tale che gli elementi di T e di T' si corrispondano secondo una determinata legge e tale che in T' valgano le stesse relazioni logiche valide in T"*

(più avanti si vedrà come il modello matematico possa evolvere in modelli fisici più complessi)

Negli esempi successivi si studieranno problemi risolvibili utilizzando il metodo grafico :

## PROBLEMA N°10

Una azienda farmaceutica vuole preparare un alimento dietetico D contenente non più del 10% di grassi, almeno il 23% di proteine non più del 30% di carboidrati . Per ottenere tale alimento l'azienda intende miscelare tre prodotti ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  già esistenti in commercio che contengono le seguenti %

$x_1$  : 6% di grassi; 20% di proteine; 15% di carboidrati ( al prezzo di £ 5000/kg)

$x_2$  : 20% di grassi, 20% di proteine; 45% di carboidrati( al prezzo di £ 8000/kg)

$x_3$  10% di grassi, 25% di proteine; 24 % di carboidrati( al prezzo di £ 6000/kg)

Determinare come devono essere mescolati i tre prodotti per ottenere un alimento con le caratteristiche richieste e che sia allo stesso tempo il più economico possibile

Per formare 1kg di alimento al costo  $z$  , la funzione obiettivo da minimizzare sarà :

$$z = 5x_1 + 8x_2 + 6x_3$$

e i vincoli saranno :

studio la funzione per 1kg di alimento e dunque  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$  da cui  $x_3 = 1 - x_1 - x_2$

a. l'alimento deve contenere non più del 10% di grassi e cioè

$$0,06x_1 + 0,20x_2 + 0,10x_3 \leq 0,10$$

b. l'alimento deve contenere almeno il 23 % di proteine e cioè

$$0,20x_1 + 0,20x_2 + 0,25x_3 \geq 0,23$$

c. l'alimento deve contenere non più del 30% di carboidrati cioè

$$0,15x_1 + 0,45x_2 + 0,24x_3 \leq 0,30$$

d. inoltre sarà evidente che  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

sostituendo il vincolo a alla funzione obiettivo il numero delle variabili si riduce a 2 e il modello sarà :

$$z = -x_1 - 10x_2 + 6$$

vincoli :

$$1. 4x_1 - 10x_2 \geq 0$$

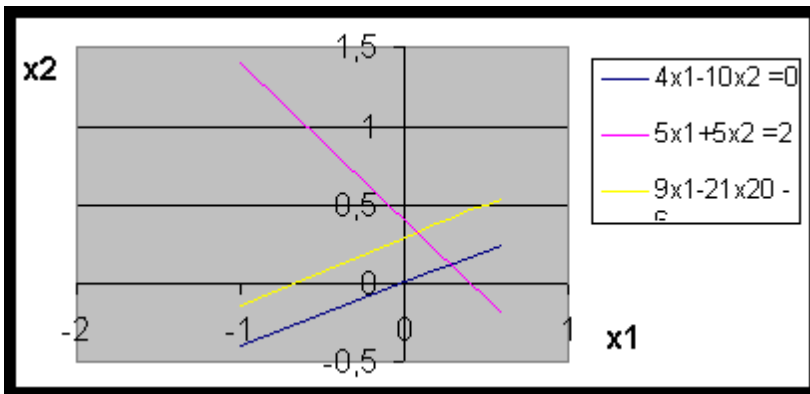
$$2. 5x_1 + 5x_2 \leq 2$$

$$3. 9x_1 - 21x_2 \geq -6$$

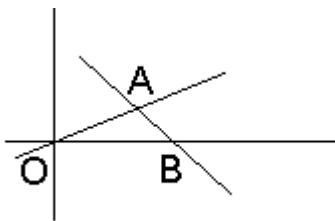
$$4. x_1 + x_2 - 1 \leq 0$$

$$x_1, x_2, \geq 0$$

Riportando i vincoli in grafico individuo un triangolo ABO di vertici O(0,0); A(2/7;4/35); B(2/5,0)



Dunque considerando il triangolo,  $x_1$  assumerà il valore minimo in B per  $x_1=2/5$  e  $x_2=0$  e sostituendo nella funzione i dati ottengo  $x_3 = 0,6$



Conclusione : all'azienda conviene preparare un kg di alimento miscelando tra loro kg0, 4 di prodotto  $x_1$ , e 0,6 di prodotto  $x_3$  con una spesa di £ 5600 ( non utilizzerà prodotto  $x_2$  perché renderebbe meno conveniente qualsiasi altra miscela).

### PROBLEMA N°11

Un accenno all'algoritmo del SIMPLESSO potrebbe partire dallo studio della funzione

$$\text{Max } f(X) = 2x_1 + x_2$$

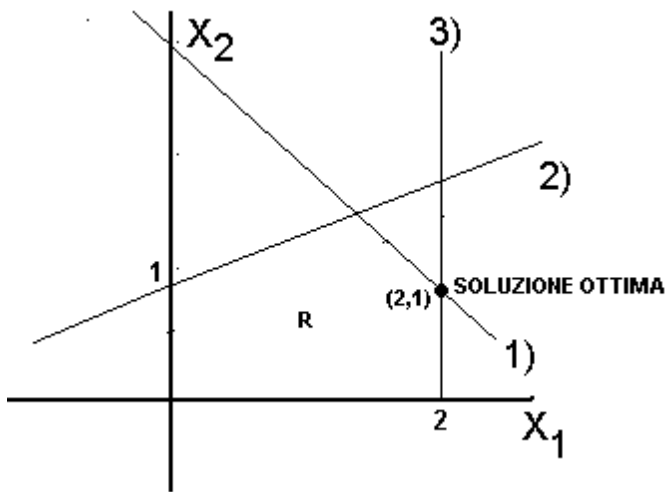
con vincoli :

$$1) x_1 + x_2 \leq 3$$

$$2) -x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$3) x_1 \leq 2$$

$$4) x_1, x_2 \geq 0$$



Il metodo grafico evidenzia la rappresentazione dei vincoli con R che è la regione delle soluzioni ammissibili e un punto in cui la soluzione è ottima perché la funzione obiettivo diventa massima e cioè  $\text{Max } f(X) = 2x_1 + x_2 = 5$

L'uso del calcolatore consente di analizzare più velocemente l'ottimo in una regione di soluzioni ammissibili e di passare da una soluzione alla successiva utilizzando le informazioni ricavate dalle iterazioni precedenti per giungere ad iterazioni successive. (metodo evolutivo)

La velocità dell'algoritmo diventa a questo punto di importanza fondamentale : Dantzig (1963) ha proposto un metodo che consente di arrivare a soluzioni ottime senza passare attraverso tutti i vertici, ma solo per alcuni di essi : tale metodo presuppone la costruzione del cosiddetto " algoritmo del simplesso"

## L'ottimo : cenno ai problemi di scelta in condizioni di incertezza

Spesso le scelte sono condizionate dal verificarsi o meno di condizioni aleatorie dette di incertezza , da informazioni spesso incomplete, dalle decisioni della concorrenza, dal verificarsi di eventi non previsti o che si erano trascurati.

In questi casi interviene il rischio della scelta che può essere affidata al calcolo del valor medio (detto della speranza matematica) o al criterio del maxi-min o del mini-max (detto più comunemente criterio del pessimista).

Il criterio del maxi-min o del mini-max è ben espresso come (rif10) criterio che non richiede alcuna valutazione dei k-eventi aleatori che determinano i risultati finali: nell'ipotesi che le conseguenze aleatorie siano dei guadagni , colui che adotta il criterio del maxi-min deve : 1) determinare per ogni decisione il minimo guadagno; 2) scegliere l'alternativa a cui corrisponde il massimo di tali minimi guadagni;

### PROBLEMA N°9

Un impianto petrolchimico produce nafta al prezzo unitario di 800 lire al litro , per rivenderla immediatamente a lire 1200 ; le quantità rimaste invendute potranno essere

utilizzate nella centrale termica con un ricavo di lire 500

Determinare la scelta di produrre quantità secondo probabilità di vendita oppure affidandosi al minimo guadagno ( certo)

Numero litri in migliaia	2	3	4	5	6
Probabilità di vendita	0,10	0,25	0,25	0,30	0,10

Indicando  $x$  = litri di nafta venduta;  $y$  = litri di nafta prodotta

Costo  $C = 800 y$

Ricavo  $R = 1200x + 500 (y - x)$

Guadagno ( per  $x \leq y$ )  $G = 1200x + 500 (y - x) - 800 y = 700x - 300y$

Guadagno ( per  $x > y$ )  $G = 1200y + 800 y = 400y$

La tabella dei possibili guadagni finali comprendente tutte le possibilità di guadagno legate alla probabilità può essere così scritta:

	$y = 2$	$y = 3$	$y = 4$	$y = 5$	$y = 6$	probabilità
$X = 2$	$(x \leq y)$ $800 \cdot (0,1)$	$(x \leq y)$ $500 \cdot (0,1)$	$(x \leq y)$ $200 \cdot (0,1)$	$(x \leq y)$ $- 100 \cdot (0,1)$	$(x \leq y)$ $- 400 \cdot (0,1)$	0,10
$X = 3$	$(x > y)$ $800 \cdot (0,25)$	$(x \leq y)$ $1200 \cdot (0,25)$	$(x \leq y)$ $900 \cdot (0,25)$	$(x \leq y)$ $600 \cdot (0,25)$	$(x \leq y)$ $300 \cdot (0,25)$	0,25
$X = 4$	$(x > y)$ $800 \cdot (0,25)$	$(x > y)$ $1200 \cdot (0,25)$	$(x \leq y)$ $1300 \cdot (0,25)$	$(x \leq y)$ $1300 \cdot (0,25)$	$(x \leq y)$ $1000 \cdot (0,25)$	0,25
$X = 5$	$(x > y)$ $800 \cdot (0,30)$	$(x > y)$ $1200 \cdot (0,30)$	$(x > y)$ $2000 \cdot (0,30)$	$(x \leq y)$ $2000 \cdot (0,30)$	$(x \leq y)$ $1700 \cdot (0,30)$	0,30
$X = 6$	$(x > y)$ $800 \cdot (0,10)$	$(x > y)$ $1200 \cdot (0,10)$	$(x > y)$ $2000 \cdot (0,10)$	$(x > y)$ $2000 \cdot (0,10)$	$(x \leq y)$ $2400 \cdot (0,10)$	0,10
Valor medio	800	1130	<b><u>1285</u></b>	1265	1035	



Il valor medio che tiene conto delle probabilità ,indica la scelta più conveniente che è produrre  $y = 4000$  litri

Il maxi-min considerando il massimo tra i minimi guadagni ( cioè  $800 > 500 > 200 > -100 > -400$ ), farà cadere la scelta su  $y = 2000$  litri

## Problema dell'ottimo in situazioni in cui il modello evolve da matematico a fisico

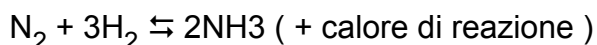
Il modello matematico evolve nel concetto di modello fisico quando " *il costruito matematico con l'aggiunta di certe interpretazioni verbali descrive un fenomeno osservato*" (J.von Neumann) e quando " *esso fornisce una immagine parziale della realtà capace di comprendere uno o più aspetti e di esercitare un intervento pratico e efficace* " (G. Israel) . (rif.11)

Galilei per primo assunse come modello teorico quello del moto senza attrito ; altri hanno elaborato la complessità partendo da modelli semplici ma concretamente realizzabili per comprendere o sviluppare sistemi ( insieme di parti che interagiscono per costruire una nuova entità) via via sempre più elaborati ( dai combinatori ai sequenziali con memoria che realizza adattamenti "in progress" sino agli automatismi ) con una evoluzione della logica che si affina dal cablato al programmato.

negli esempi successivi si tratterà un classico esempio di risoluzione di modello chimico ritenuto realizzabile solo in presenza di un elemento ( paradossalmente non variabile) come il catalizzatore; inoltre si introdurranno i diversi aspetti del modello ambientale la cui comprensione e risoluzione dei problemi richiede sinergie tra modelli teorico matematici e politico sociali.

### PROBLEMA N°12

L'ottimo come ricerca del miglior equilibrio tra variabili può condizionare le scelte in un processo chimico : Un caso interessante è lo studio della sintesi dell'ammoniaca il cui equilibrio è qui rappresentato :



Secondo il principio di Le Chatelier "una reazione chimica raggiunge un equilibrio , e se tale equilibrio viene in qualche modo disturbato dall'esterno, il sistema reagisce in modo da annullare il disturbo e ristabilire l'equilibrio " quindi indicando con [ ] le concentrazioni dei reagenti e prodotti oppure con p le pressioni parziali posso scrivere :

$$K_{eq} = \frac{[NH_3]^2}{[N_2][H_2]^3} =$$

$$K_p = \frac{p^2(NH_3)}{p(N_2) p^3(H_2)} =$$

e da queste dedurre che ,affinchè K rimanga costante , aumentando il denominatore aumenterà di conseguenza il numeratore , e dunque aumentando la concentrazione dei reagenti ( o la loro pressione parziale) si otterrà più prodotto ammoniacca.

Una diminuzione di temperatura favorirà la reazione che è esotermica mentre un aumento sposterà l'equilibrio verso sinistra con formazione di reagenti a scapito del prodotto.

Allo stesso tempo una bassa temperatura influirà altresì sulla cinetica delle molecole ( a bassa temperatura gli urti sono scarsi e dunque la reazione sarà estremamente lenta)

E' questo il classico caso in cui le condizioni di ottimo per uno sfruttamento in economia di tipo industriale non si realizzano per il conflitto tra le variabili (P, T, [ ]) e i vincoli ( a T° < 100° la reazione è troppo lenta; a T° > 100 la reazione porta alla formazione di prodotti di partenza)

Soluzione : la tecnologia interviene nell'irrisolto problema matematico con l'ausilio del catalizzatore : elemento che non partecipa alla reazione ma permette di raggiungere le condizioni ottimali di reazione aumentando la cinetica e dunque la velocità della reazione stessa.

### PROBLEMA N°13

La filosofia "Tayloristica" che ha regolato la scelta nelle relazioni di tipo economico industriale è stata fortemente legata alla economicità mentre l'attuale aspirazione è la ricerca dell'eccellenza in cui economicità ed efficienza si coniughino alla politica del sociale in coerenza con uno sviluppo appropriato del territorio nel quale opera l'elemento produttivo.

La QUESTIONE AMBIENTALE può essere vista come ricerca dell'ottimo in un equilibrio tra modelli diversi di sviluppo e risorse dell'ambiente

Poiché il sistema produttivo tocca i fattori ambientali, consumandoli, è opportuno analizzare razionalmente il problema nell'ottica dei concetti di programmazione e di ottimizzazione che, al di là dei motivi etici ( pur fondamentali) , realizzano il vero concetto di economia intesa come : disciplina logica e prassi comportamentale che realizza i massimi risultati con i minimi mezzi.

Dunque se la **funzione obiettivo** è l'economia ambientale , essa sarà

$$Z = f ( x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Con risultati attesi

- $x_1$  = economici: in termini di attivazione delle risorse e di probabile ritorno degli investimenti effettuati
- $x_2$  = sociali: in termini di ritorno a livello
- $x_3$  = ambientali: in termini di tutela e potenziale miglioramento della qualità

ambientale

- $x_4 =$  occupazionali: in termini di potenziale incremento dell'occupazione

ma con **vincoli** che possono essere parimenti rappresentati da :

$a_1x_1 =$  degrado ambientale o inquinamento totale (compreso il concetto di consumo e distruzione delle risorse energetiche) intendendo  $a_1x_1 > 0$  un aumento e  $a_1x_1 < 0$  una diminuzione del degrado

$a_2x_2 =$  aumento della popolazione, squilibri sociali

$a_3x_3 =$  fattore tecnologico (quantità di inquinamento e di consumo di energia incorporata in unità di bene

$a_4x_4 =$  quantità di beni consumati da ciascuna persona

(l'elaborazione dell'esempio si limita agli aspetti più macroscopici del problema senza addentrarsi nella complessità)

Lo scopo è ottimizzare la funzione obiettivo lineare  $z = cx$  rendendo minimi i vincoli che, espressi come  $ax$ , potrebbero rappresentarsi in una disequaglianza come :

$$\sum_{i=1}^n a_n x_n \leq 0 \quad (\text{formula n°1})$$

(dove  $x$  rappresenta le variabili di decisione e è  $x \geq 0$ ,  $c$  i coefficienti della funzione obiettivo,  $a$  i coefficienti della variabile di decisione)

Graficamente un razionale schema applicato al concetto di programmazione indica le possibili soluzioni di metodo: Un programma nasce in una situazione definita da una funzione e delimitata da vincoli, quando questi ultimi mancano, la funzione obiettivo si semplifica e se addirittura si annullano si può parlare di sperimentazione di più obiettivi possibili ; se manca la funzione obiettivo mentre esistono vincoli, si dovrà negoziare una funzione obiettivo che sia adatta ai vincoli esistenti.

In mancanza di funzione obiettivo e vincoli c'è il caos o forse nasce una nuova funzione delimitata da nuovi vincoli.



La complessa elaborazione di un tale modello (o forse sintesi di più modelli) porta al concetto di :SVILUPPO SOSTENIBILE

Il concetto di sviluppo sostenibile è entrato oggi nel linguaggio comune di chi si occupa di pianificazione (PRG, piani Territoriali, Leggi, Documenti regionali ecc.)

E' variamente definito come sviluppo che soddisfa i bisogni del presente senza compromettere la capacità delle generazioni future di soddisfare i propri. ,richiede l'integrazione di ecologia e economia definendo i limiti di vivibilità all'interno di un certo ambiente .

Al pari vengono definiti i limiti di insostenibilità : crescita esponenziale demografica , desertificazione (perdita di suoli agricoli) ; distruzione manto forestale , inquinamento della biosfera , inquinamento e diminuzione dell'acqua , ecc., squilibrio paesi ricchi e paesi poveri

Indice del benessere di un'economia sostenibile (indice di sostenibilità). È un indice di misura e quantificazione dello sviluppo sostenibile che nel calcolare il benessere di una nazione non usa solo termini economici che riportano il tutto alla moneta.

Ci sono voci come i costi di urbanizzazione, i costi di trasporto, la perdita di aree umide, la perdita di terreni coltivabili, la perdita di risorse non rinnovabili.

Dalla disuguaglianza precedente si può giungere alla Formula della sostenibilità semplice proposta da Pearce in Economia Verde.

$$\sum E < 0$$

Dove E = danni ambientali cioè le voci più importanti dell'insostenibilità (alterazione e distruzione di risorse non rinnovabili)

Per la città è possibile utilizzare questa semplice equazione misurando il danno ambientale (consumo e alterazioni irreversibili delle risorse non rinnovabili). E' una contabilizzazione difficile ma praticabile e concreta.

Nasce il concetto di pianificazione del territorio

Evolve nella cultura dello sviluppo sostenibile il concetto di Piano regolatore che debba

fare un bilancio più che produrre un azzonamento classico (cultura razionalista); ad ogni uso e destinazione deve chiedersi se la trasformazione programmata consuma: cosa, dove, quanto e come.

Il Piano mette in gioco delle quantità (nella trasformazione) localizzate in luoghi specifici (ad es. oggi si calcolano i costi di urbanizzazione per la trasformazione di zone specifiche) che secondo l'arch. Terzi (rif.9) interagiscono nel cambiamento :

"il nuovo Piano cambia completamente l'asse del ragionamento , spostando l'attenzione dal singolo elemento ad un comparto più ampio, che in prospettiva, si realizza ed organizza per parti"

Dunque la formula precedente evolve in una più complessa formula della sostenibilità realizzata per singole parti o aree omogenee :

$$\Sigma E = \Sigma E_1 + \Sigma E_2 + \dots + \Sigma E_n < 0$$

Oggi è necessario fare un bilancio di consumo dei fattori ambientali (suolo, acqua, atmosfera); delle componenti ambientali si elaborano bilanci (quanti ne trasformato, quanti ne conservo, quanti ne distruggo). La sommatoria dei danni ambientali deve essere minore di zero. Entra in gioco il conteggio e la valutazione ambientale (ad esempio una zona industriale a cui venga contemporaneamente affiancato un parco e un sistema di depurazione delle acque e recupero di un corso d'acqua degradato, si può intendere con bilancio in favore di danno ambientale minore (<0) della situazione precedente.

Un a sinergia di competenze è necessaria per realizzare l'**ottimizzazione** degli obiettivi e ciò richiederà la disponibilità di diverse figure

**Il politico** attua leggi che fissano limiti operativi proposti. Leggi legate all'inquinamento delle acque, atmosfera, protezione del suolo, rimboschimento, razionale uso della energia, equilibrio demografico, equilibrio economico nord/sud.

**Il tecnico ( chimico, geologo, architetto , geometra ....)** collabora con le amministrazioni di competenza ( es :ASL-UOC-PMP, ANPA(Agenzia Nazionale Protezione Ambiente), EMAS(Sistema comunitario di ecogestione nel quale le imprese aderiscono volontariamente), Ordine (comportamento etico/deontologico), Università' (valutazione scientifica dei dati), associazioni ambientali , Ente Comune, Provincia Regione, Ministero.....)

**Il cittadino** denuncia inosservanze alla legge e ,attraverso strumenti diversi di comunicazione culturale, elabora proposte e partecipa alla valutazione di impatto ambientale che ,nel cosiddetto "sviluppo sostenibile", coniuga il benessere sociale con la possibilità' di sopravvivenza delle generazioni future .

La collaborazione tra queste figure è oggi quanto mai necessaria nella gestione dell'ottimo in una realtà che interseca equilibri di tipo sociale e di economia industriale. : un esempio discutibile è nel recente DL 334 del 17.8.99 in cui aziende di classe B e C non sono tenute a inviare al Sindaco ( che ha l'obbligo di informare la cittadinanza art, 22 ,,) scheda informativa sulle sostanze tossiche e pericolose presenti in stabilimento ; ed ancora : per aziende di tipo A<sub>2</sub> ,B,C non viene previsto l'invio a Prefetto e Provincia ( resp. Protezione Civile) di informazioni utili per l'elaborazione di un piano di emergenza esterno.

-

Al termine di questo lavoro una **valutazione** didattica sarà sempre legata agli obiettivi teorici, pratici e di orientamento previsti e potrà essere nella scuola motivo di **recupero** culturale del valore dell'ottimo come concetto di temperanza e non di preminenza o vantaggio in una umana prospettiva di condivisione sociale.

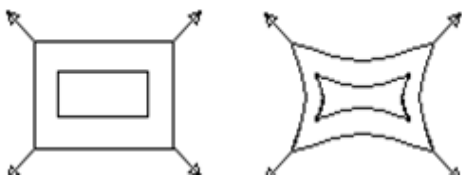
## Bibliografia

1. G. B. Dantzig :Linear Programming and Extensions . Princeton University Press, Princeton (N.J.) 1963.
2. A. Schrijver : Theory of Linear and Integer Programming . J.Wiley & Sons, New York 1986.
3. G. Bessiere : Il calcolo differenziale e integrale: Hoepli, 1964
4. Raffaella Manara :Matematica controllo. Ed.Mc Graw Hill, 1999
5. Enciclopedia UTET
6. A.Cacciatore ,E.Stocchi: Impianti chimici industriali, Edisco, 1999
7. Silvio di Pietro :Tecnologie Chimiche Industriali, Hoepli, 1998
8. Schlager K.I :A Land Use Plan Design Model. Journal of the Institute of Planners,1965
9. Arch. Terzi Assessorato all'Urbanistica del Comune di Cremona : Mondo Padano . 04.03.2000
- 10.Dodero, Baroncini, Manfredi: Gli argomenti di matematica "; Ghisetti e Corvi editori, 1998
- 11.Nicosia S : Le parole della matematica . CEDAM 1998
- 12.D.Halliday R. Resnick: Fisica Casa Editrice Ambrosiana
- 13.M.Krasnov;G.Makarenko; A.Kiselev :Calcolo delle variazioni"  $N^3 \Delta A T E \Delta b C T B$
- 14.Wirner :analisi matematica vol 1.CEDAM

## Un esempio pratico di applicazione dell'ottimo

### Cenni di topologia :

Nasce con Leonardo Eulero (1705-1780) e viene chiamata Analysis situs; segue il francese Carnot, tedesco Gauss, italiani Peano e Severi, scuola francese di Poincarè (1854-1912) : studia le proprietà delle figure quando queste vengono sottoposte a trasformazioni ( trasformazioni topologiche) tali da far perdere loro le proprietà metriche e proiettive di cui godono : (propr. Metriche = lunghezza ampiezza area, proprietà proiettive : punto retta rapporto similitudine...)



- Invarianti di una trasformazione topologica = durante una trasformazione topologica non variano : il PERCORSO da un punto ad un altro, la CONTINUITA' con cui le curve dividono il piano senza presentare interruzioni, PARTE INTERNA E ESTERNA alle curve è non può variare e non si può andare dall'interno all'esterno senza intersecare le curve

Due figure si dicono equivalenti quando sono ottenute con una trasformazione topologica che lascia

inalterati gli invarianti

Superficie unilatera : in topologia è il nastro o anello di moebius

risolvere un problema

Quando si deve risolvere un problema spesso è conveniente tentare di risolverlo geometricamente. I punti possono rappresentare l'oggetto ; le linee comunicazione tra punti. Questo strumento, nella matematica dell'ottimo è fondamentale e va sotto il nome di grafo.

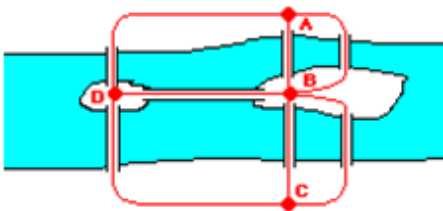
La teoria dei grafi parte dal matematico svizzero del Settecento, Leonardo Eulero, che pubblicò la sua teoria nel 1736. Primo Obiettivo di Eulero fu la risoluzione del famoso problema dei 'ponti di Königsberg'. La città è attraversata da un fiume e include due isole collegate tra loro e con le altre sponde del fiume da 7 ponti. Molti si sono chiesti se fosse possibile partire da una qualunque delle quattro zone in cui risultava naturalmente divisa la città, attraversare ogni ponte esattamente una volta e tornare al punto di partenza.

Eulero sostituì ogni zona con un punto ed ogni ponte con una linea ottenendo un grafo. Sarebbe stato possibile percorrere tutte le linee del grafo sequenzialmente, ciascuna una sola volta, e tornare al punto di partenza.

Da buon matematico egli generalizzò la questione ed individuò un criterio per decidere se è percorribile (nel senso appena detto) un grafo qualunque: il grafo deve essere connesso - cioè ogni punto deve essere raggiungibile - e da ogni punto deve uscire un numero pari di linee.

Eulero dimostrò che il problema dei ponti di Königsberg era impossibile!

Schema dei ponti di Königsberg(Eulero): fissa rete topologica, vertici (punti) e archi (linee segnate)



(non è percorribile in un solo viaggio ma in due)



A,B,C,D sono vertici dispari (sarebbero positivi se arrivassero al vertice numeri positivi di archi)

Le quattro leggi di Eulero :

1. in una rete topologica il numero dei vertici dispari è sempre pari
2. una rete avente tutti i vertici pari è senz'altro percorribile in un solo viaggio ritornando al

punto di partenza e senza percorrere un arco due volte

3. una rete contenente due e solo due vertici dispari si può percorrerla in un solo viaggio ma senza tornare al punto di partenza

una rete contenente un numero pari maggiore di due vertici dispari non è mai percorribile in un solo viaggio. il numero di viaggi occorrenti è la metà del numero di vertici dispari.

## **L'ottimo nella Sindrome di Down. Le diverse abilità dalla matematica alla musica**

Nella letteratura scientifica alle persone con la sindrome di Down venivano e vengono tuttora attribuite grandi difficoltà musicali, eppure la realtà spesso evidenzia abilità o ricerca di abilità profonde che si sviluppano in crescendo con linguaggi spesso non comuni, spesso complessi. Il principio più importante è comune a tutti: più la persona si rende conto dell'utilità di quello che impara, più è motivata. Questo le rende più semplice l'apprendimento di nuovi contenuti spesso superando il cosiddetto "sano" nella sua condizione di svogliato e immotivato. Quali sono gli interessi e gli hobby della persona, con cosa si identifica, in quale contesto personale può apprendere? Tramite tempestiva costruzione di esempi pratici legati alle situazioni di vita individuali della speciale persona si crea un approccio positivo alla musica.

"Lernen funktioniert autobiografisch", cioè si apprende in modo autobiografico, disse il noto neurologo Gerhard Roth. "È più semplice se ha a che fare con me e con la mia situazione". Se persone con la sindrome si divertono ad avere a che fare con la musica, se possono scoprirne l'importanza per la propria vita, cresce la loro motivazione interiore, la cosiddetta motivazione intrinseca, che le porta inconsapevolmente a dedicarsi alla musica. Dalla vita, per la vita!

Genitori e professionisti hanno la responsabilità pedagogica di individuare le preconoscenze individuali delle persone con sindrome a loro vicine e di trovare connessioni sensate, cosicché possano collegare in modo costruttivo le cose apprese con quelle che già conoscevano. La frase "È come..." può diventare la chiave per il mondo della musica? Esempi pratici legati alla vita quotidiana possono semplificare: cantare ascoltare dischi, tamburellare, usare strumenti musicali. Le capacità d'apprendimento delle persone dipendono dalla loro motivazione ed emozione, le quali controllano la concentrazione e dividono ciò che è interessante da quello che non lo è. "Una condizione importante per un apprendimento efficace, inoltre, è costituita dal comportamento e dalle aspettative che hanno coloro che accompagnano le persone definite problematiche nel mondo della musica. La fiducia nella loro curiosità, nelle loro capacità e nei loro interessi accresce la loro fiducia in sé. Questo effetto sociale positivo viene chiamato "self fulfilling prophecy", secondo il quale le persone con la sindrome Down si comportano in modo tale da esaudire le aspettative che abbiamo. La nostra fiducia nelle loro potenzialità è la base della loro competenza! <e questo non è un aspetto della vita di tutti?

Spesso le persone con la sindrome hanno un senso tattile diffuso. E ciò va evidentemente sfruttato: A. Jean Ayres (2002) definisce la percezione tattile-cinestetica e vestibolare come base sensomotorica per lo sviluppo. La vista fa parte delle competenze basilari della persona. Grazie alle immagini essi memorizzano le cose più facilmente. L'orientamento temporale pone la base per la consapevolezza delle serie. La stima della durata d'attività pratiche quotidiane agevola la pianificazione del giorno della persona e aiuta indirettamente il controllo di concentrazione grazie a rinvii di esigenze e controllo dell'impulso. Il modo di pensare musicale viene decisamente influenzato da capacità cognitive come la memoria e la concentrazione. Se la persona che apprende può rimanere nell'ambito dei propri interessi, arriva ad una profonda concentrazione e dedizione. Maria Montessori la chiama "polarizzazione della concentrazione" La maggior parte delle persone con la sindrome appartiene al gruppo di apprendimento tattile-cinestetico e visivo, riesce cioè ad apprendere i contenuti soprattutto tramite l'osservazione e il tatto. Il conteggio con le dita dà molteplici stimolazioni in questi ambiti di percezione.

Spesso le persone con la sindrome hanno un senso tattile diffuso. E ciò va evidentemente sfruttato: A. Jean Ayres (2002) definisce la percezione tattile-cinestetica e vestibolare come base sensomotorica per lo sviluppo. La vista fa parte delle competenze basilari della persona. Grazie alle immagini essi memorizzano le cose più facilmente.

L'orientamento temporale pone la base per la consapevolezza delle serie. La stima della durata d'attività pratiche quotidiane agevola la pianificazione del giorno della persona e aiuta indirettamente il controllo di concentrazione grazie a rinvii di esigenze e controllo dell'impulso. Il modo di pensare musicale viene decisamente influenzato da capacità cognitive come la memoria e la concentrazione. Se la persona che apprende può rimanere nell'ambito dei propri interessi, arriva ad una profonda concentrazione e dedizione. Maria Montessori la chiama "polarizzazione della concentrazione" La maggior parte delle persone con la sindrome appartiene al gruppo di apprendimento tattile-cinestetico e visivo, riesce cioè ad apprendere i contenuti soprattutto tramite l'osservazione e il tatto. Il conteggio con le dita dà molteplici stimolazioni in questi ambiti di percezione.



La memorizzazione può essere migliorata con l'impiego dei sensi, con esercizi e ripetizioni efficienti e con pause che servono alla consolidazione. Un apprendimento efficace si basa su ripetizioni molto frequenti.

Oggi giorno le persone si devono confrontare con un mondo tecnologico. L'uso del televisore, della calcolatrice, del cellulare o del computer aiutano le persone con la sindrome nella loro quotidianità, anche l'uso dello strumento musicale può agevolare la costruzione di un racconto sequenziale ed organico.

Per queste persone la musica è importante, grazie alla funzione che essa esercita nella costruzione di un ordine sequenziale legato ad un semplice spartito musicale in cui l'azione, legata ad un semplice testo scritto, offre immediato riscontro nella nota musicale costruita e collegata alla precedente.

Fondamentale è il conteggio con le dita che porta le persone con la sindrome a concentrarsi (documenti d'osservazione di diagnostiche pedagogiche nel centro di competenza Down Syndrom di Leoben, 2005-2010).. La concentrazione si dirige verso i movimenti delle dita, così viene sostenuta visivamente e verbalmente. Si verifica che l'ordine lineare delle dita non aiuta solo ad orientare la mente ma contribuisce anche ad ordinare i pensieri. Le proprie dita e mani portano ad una grande identificazione e autonomia. Sono sempre a disposizione, non vanno perse e possono essere adoperate in diverse situazioni. Si ritiene che neuroni specchio possano controllare la capacità d'imitazione delle persone con la sindrome. Esercizi fondamentali sono l'elaborazione di figure delle dita accompagnate da ripetute istruzioni.

Imparare è un processo creativo che sviluppa una dinamica propria. Ogni persona con la specifica disabilità nelle lezioni porta con sé le proprie esperienze personali e le proprie conoscenze di base. Agganciandosi alle conoscenze ed esperienze già presenti, può essere costruito un ponte verso le scienze di calcolo e la musica, che spesso viene respinta e temuta.

Per insegnanti che fanno parte del gruppo di persone che prediligono l'apprendimento tramite udito è importante tenere conto del fatto che la disabilità preferisce metodi di apprendimento visivi e tattile-cinestetici. Le loro mani sono la porta al mondo matematico e musicale, aiutano a capire "il segreto" del saper contare e dunque di saper musicare.

Blakemore (2008, S 176 f9 scrive: "Cambiamenti nel cervello in generale verificano dipendenza dall'utilizzazione: Use it or lose it: quello che non viene usato va perso. Anche il cervello adulto dispone di un'enorme capacità di cambiamento. Si impara ad ogni età e non è mai troppo tardi per farlo"

Si può dunque anche imparare dall'offerta che ci offre chi è affetto da abilità diverse

Appunti tratti dal web sono stati integrati con le esperienze espresse dal prof. Mario Maggi che negli anni settanta contribuì non poco alla didattica in ambiente didattico particolare come la disabilità. Grandi successi sono stati ottenuti dal figlio m° Sergio Maggi che ha elaborato un particolare metodo nella evoluzione musicale del figlio Paolo. Concerti ed esibizioni sono il frutto di tale originale e unico lavoro

riferimenti

--- <https://cremonasera.it/cronaca/venerd-alle-6-concerto-all-alba-sul-po-sul-terrazzo-di-largo-marinai-d-italia-con-i-musicisti-dell-anlai-sergio-maggi-paolo-maggi-alberto-simonetta-e-anna-glibchuk>

--- <https://www.fondazioneLucchi.it/ilsognodipaolo/>

--- <https://www.diocesidicremona.it/presntati-i-restauri-della-chiesa-di-santo-stefano-a-ossolaro-18-09-2021.html?print=print>

--- <https://www.welfareNetwork.it/gi-auguri-del-sindaco-e-della-giunta-di-cremona-con-paolo-e-michelangelo-20151222/>

--- <https://www.medeaoonlus.org/news/sono-ricoverato-in-oncologia-suona-per-me-musica-in-reparto/>

Curricolo

[http://collezionemaggi.altervista.org/00%20curriculum/0\\_curricolo\\_Mario\\_e\\_Giorgio\\_\\_al\\_2023\\_compressed.pdf](http://collezionemaggi.altervista.org/00%20curriculum/0_curricolo_Mario_e_Giorgio__al_2023_compressed.pdf)